・ $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.　・ SU(N)の 基本表現 : T_a　($[T_a,T_b] = i\underbrace{f_{abc}}_{\text{構造定数}}T_c$, $\mathrm{Tr}[T_aT_b] = \frac{1}{2}\delta_{ab}$) $\longrightarrow$ $\overset{\widehat{SU(N)}}{\underset{\shortparallel}{}}\ U = \exp[i\underbrace{\sum_{a=1}^{N^2-1}\theta_a T_a}_{\theta}] = \exp(i\theta)$.

随伴表現 : $(T_a)_{bc} := -if_{abc}$.

$\mathcal{L} \xrightarrow{\frac{\delta^n \mathcal{L}}{\delta J\cdots\delta J}} Z \xrightarrow{(-i\ln Z)} W \to \langle\Omega|T(\ \ )|\Omega\rangle \xrightarrow{LSZ} M \to S \to$ 断面積

~~7.4.3.~~

<u>復習</u>・ Spin $\frac{1}{2}$ の場 $\overbrace{\psi_\alpha^1,\cdots,\psi_\alpha^N}^{N}$ (但し $m_{\psi_\alpha^1} = \cdots = m_{\psi_\alpha^N} =: m$) を考える. $\psi_\alpha := \begin{pmatrix}\psi_\alpha^1\\ \psi_\alpha^2\\ \vdots\\ \psi_\alpha^N\end{pmatrix}$ とし, その自由場の Lagrangian

($\alpha = 1,2,3,4$ は spinor の成分を表す.)

$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x)$ に gauge 原理 $U \mapsto U(x) = \exp[-ig\theta]$ を適用することで 非可換 gauge 場 (Yang-Mills 場)

$A_\mu(x)$ が, $\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu D_\mu - m]\psi(x)$ と共変微分 $D_\mu := \partial_\mu \mathbb{I} + igA_\mu(x)$ を通して導入される.

($A_\mu(x) \mapsto A_\mu^U(x) := U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$ がこの際の $A_\mu(x)$ の変換則) ··· (i)

また, 無限小 gauge 変換 $|\theta(x)| \ll 1$ を考えると, $U = \mathbb{I} - ig\theta$, $\psi_a \mapsto (\mathbb{I} - ig\theta)\psi_a$ と変換され (i) に代入すると

$A_\mu^U(x) \mapsto A_\mu^\theta(x) = A_\mu + D_\mu\theta$　($D_\mu := \partial_\mu\mathbb{I} + ig\underset{}{\overset{\text{(定義は一致する)}}{[A_\mu,\cdot\,]}}$).　$A_\mu(x) := \sum_{a=1}^{N^2-1}A_\mu^a(x)T_a$ と書けば これは

$A_\mu^a(x) \mapsto A_\mu^a(x) + \partial_\mu\theta^a(x) - g\sum_{b,c=1}^{N^2-1}f_{abc}A_\mu^b(x)\theta^c(x)$ と表せる.

Yang-Mills 場の強さ $\mathbb{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$.　$F_{\mu\nu}(x) := \sum_{a=1}^{N^2-1}F_{\mu\nu}^a(x)T_a$ と書けばこれは.

$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ と表せる.

$\mathbb{F}_{\mu\nu}$ の gauge 変換は　$\mathbb{F}_{\mu\nu} \mapsto \mathbb{F}_{\mu\nu}^U = U\mathbb{F}_{\mu\nu}U^\dagger$.　··· (ii)

・ U(1) gauge 理論からの類推により, SU(N) Yang-Mills 理論の (運動項を記述する) Lagrangian 密度は 場を2次の形で, さらに偏微分も 2次の形で含んだ物がふさわしい. 加えて Lorentz 不変性と gauge 不変性を有する必要がある.

(ii) から $\mathrm{tr}\left(\sum_{a,b=1}^{N^2-1}F_{\mu\nu}^a T_a F^{b\mu\nu}T_b\right) = \underline{\frac{1}{2}}\sum_{a=1}^{N^2-1}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ は gauge 不変 (かつ Lorentz 不変) で, 上記の条件を 満たす. 係数_は再び U(1) gauge 理論からの類推により $-\frac{1}{4}$ にすべき.

$$\longrightarrow \mathcal{L}_{YM} = \sum_{\alpha=1}^{4}\bar{\psi}_\alpha(x)\left\{i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ig\sum_{a=1}^{N^2-1}A_\mu^a(x)T_a\right) - m\right\}\psi_\alpha(x) - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{N^2-1}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}.$$

7.4.3.　BRS(T) 量子化

1.　FPゴースト c^a, 反ゴースト $\bar{c}^a$, 中西-Lautrup 場 B^a の導入

(step1)

まずは U(1) gauge 理論で考える. その作用を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{4}\int d^4x\,(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\,(\partial^\mu A^\nu\partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu)\\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\,(-A^\nu\Box A_\nu + A_\mu\partial^\mu\partial_\nu A^\nu)\quad (\because \text{部分積分})\\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\,A^\mu(-g_{\mu\nu}\Box + \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu\\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\left\{A^0\nabla^2A^0 + 2A^0\partial_0\sum_{k=1}^{3}\partial_k A^k + \sum_{j,k=1}^{3}A^j(\delta_{jk}\Box + \partial_j\partial_k)A^k\right\}
\end{aligned}$$

ここで $A^0\nabla^2A^0 + 2A^0\partial_0\sum_{k=1}^{3}\partial_k A^k = \left(A^0 + \nabla\cdot\left(\dot{A}\frac{1}{\nabla^2}\right)\right)\nabla^2\left(A^0 + \frac{1}{\nabla^2}\nabla\cdot\dot{A}\right) - \nabla\cdot\dot{A}\frac{1}{\nabla^2}\nabla\cdot\dot{A}$ $= -\sum_{j,k=1}^{3}A^j\left(\partial_0\partial_j\frac{1}{\nabla^2}\partial_0\partial_k\right)A^k$ ($\because$ 部分積分)

であり, また $\sum_{j,k=1}^{3}A^j\left(\partial_j\partial_k - \partial_0\partial_j\frac{1}{\nabla^2}\partial_0\partial_k\right)A^k = \sum_{j,k=1}^{3}A^j\left(\nabla^2 - (\partial_0)^2\right)\frac{\partial_j\partial_k}{\nabla^2}A^k$

$$= -\sum_{j,k=1}^{3}A^j\Box\frac{\partial_j\partial_k}{\nabla^2}A^k$$

$=: P_{jk}$ とおくと $P^2 = P$, $\sum_{j=1}^{3}\partial_j P_{jk} = 0$ を満たす.

である. ので　$S = -\frac{1}{2}\int d^4x\left\{\left(A^0 + \nabla\cdot\dot{A}\frac{1}{\nabla^2}\right)\nabla^2\left(A^0 + \frac{1}{\nabla^2}\nabla\cdot\dot{A}\right) + \sum_{j,k=1}^{3}A^j\Box\left(\delta_{jk} - \frac{\partial_j\partial_k}{\nabla^2}\right)A^k\right\}$ と変形可能　··· (1)

以下 Einsteinの縮約記法をとる.

$$\begin{cases} A_\mu^T := P_{\mu\nu}A^\nu \\ A_\mu^L := (I_{\mu\nu}-P_{\mu\nu})A^\nu \end{cases} \Rightarrow \partial^\mu A_\mu^T = 0,\quad \partial^\mu A_\mu^L = \partial^\mu A_\mu$$

$(\mu=1,2,3)$

従って(1)より

$$\begin{aligned} Z = \int \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}A_\mu e^{iS} &= \int \mathcal{D}A \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\, A \Box P A\right] \\ &= \int \mathcal{D}A_T \mathcal{D}A_L \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\, A_T \Box A_T\right] \\ &= \underbrace{\left(\int \mathcal{D}A_\mu^L\right)}_{\text{この項により発散.}}\left(\int \mathcal{D}A_\mu^T \exp\left[-i\int d^4x \frac{1}{2} A^{\mu T}(-\Box)A_\mu^T\right]\right). \end{aligned}$$

(Step2)

gauge固定項を$F(A)$ (ex. $F(A)=\nabla\cdot A$ (Coulomb), $\partial_\mu A^\mu$ (Landau)) とし, gauge変換されたgauge場を $(A^\Lambda)^\mu = A^\mu + \partial^\mu\Lambda$ とする.

このとき gauge関数Λに関する恒等式(2)が成り立つ:

$$1 = \left|\mathrm{Det}\left(-\partial_\mu \frac{\delta F(A)}{\delta A_\mu}\right)\right| \int \mathcal{D}\Lambda\, \delta[F(A^\Lambda)] \quad \cdots (2)$$

FP関数行列式 $\mathrm{Det}\left(\frac{\delta F(A^\Lambda)}{\delta\Lambda}\right)$ は gauge不変.

((2)の証明は時間があれば)

$$(\because)\quad \frac{\delta F(A^\Lambda(x))}{\delta\Lambda(y)} = \frac{\delta F(A^\Lambda(x))}{\delta A_\mu^\Lambda(z)}\frac{\delta A_\mu^\Lambda(z)}{\delta\Lambda(y)} = \frac{\delta F(A(x))}{\delta A_\mu(z)}\partial_\mu^z \delta^4(z-y)$$

$$= -\partial_\mu^y \frac{\delta F(A(x))}{\delta A_\mu(y)} \quad (\because \text{部分積分}) \quad \to \Lambda\text{に依らない.}$$

□

(2)より

$$Z = \int \mathcal{D}\Lambda \mathcal{D}A_\mu \left|\mathrm{Det}\left(\frac{\delta F(A^\Lambda)}{\delta\Lambda}\right)\right| \delta[F(A^\Lambda)] \exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\right]$$

逆gauge変換 $A_\mu^\Lambda \mapsto A_\mu$ のもとで $\mathcal{D}A_\mu$, $\exp[\sim]$, FP行列式は gauge不変であるから

$$Z = \int \mathcal{D}\Lambda \underbrace{\left(\int \mathcal{D}A_\mu \left|\mathrm{Det}\left(\frac{\delta F(A^\Lambda)}{\delta\Lambda}\right)\right| \delta[F(A)] \exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\right]\right)}_{\Lambda\text{に依らない.}}$$

→ Zの発散はΛに関する汎関数積分の発散と理解される. 以下 を Z_F とする.

Fresnel汎関数積分による恒等式 $1 = \int \mathcal{D}f \exp\left(-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\, f^2(x)\right)$ ($\xi=1$: Feynman gauge, $\xi=0$: Landau-Lorentz gauge) $\cdots (3)$

を Z_F に挿入して

$$\begin{aligned} Z_F &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}f \left|\mathrm{Det}\left(-\partial_\mu \frac{\delta F(A)}{\delta A_\mu}\right)\right| \delta[F(A)-f(x)] \exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\right] \exp\left(-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\, f^2(x)\right) \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \left|\mathrm{Det}\left(-\partial_\mu \frac{\delta F(A)}{\delta A_\mu}\right)\right| \exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}F(A)^2\right)\right]. \end{aligned}$$

$F(A)$を共変gauge固定 $\partial_\mu A^\mu$ で定めると

$$Z_L := Z_F\big|_{F(A)=\partial_\mu A^\mu} = \int \mathcal{D}A_\mu |\mathrm{Det}(-\Box)| \exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right)\right]$$

$$\xrightarrow[\text{Euclid化 } (x^0\mapsto -ix_4) \,+\, \text{source関数 } J_\mu\ (\mu=1\sim4) \text{の挿入.}]{} \quad Z[J] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left[-\int d^4x_E\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + J_\mu A_\mu\right)\right].$$

(Step3)

Step1, Step2 の議論を SU(N) Yang-Mills理論に適用する. (以下 A, θ 等は Lie代数上に値を持つことに注意.)

$A_\mu^\theta = A_\mu + D_\mu\theta$ の場合に(2)に相当するものは f を任意関数として $F(A^\theta)=f$ の解を $\theta=\theta_0$ として (注1)

$$1 = \exp\left[\int d^4x \frac{\theta_0^2}{2\epsilon}\right] \left|\mathrm{Det}\left(\frac{\delta F(A^\theta)}{\delta\theta}\right)\right| \int \mathcal{D}\theta \exp\left[-\int d^4x \frac{\theta^2}{2\epsilon}\right] \delta[F(A^\theta)-f] \quad \cdots (2)'$$

である. (ϵ: 無限小因子)

また(3)に相当するものは

$$1 = \int \mathcal{D}f \exp\left[-\frac{i}{\xi}\int d^4x\, \mathrm{Tr}\, f^2(x)\right]. \quad \cdots (3)'$$

(2)', (3)' より

$$Z_{F(YM)} = \int \mathcal{D}A_\mu \left|\mathrm{Det}\left(-D_\mu \frac{\delta F(A)}{\delta A_\mu}\right)\right| \exp\left[i\int d^4x\, \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi}F(A)^2\right)\right],$$

$F(A)=\partial_\mu A^\mu$ (共変gauge固定) として Euclid化すれば

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A^a_\mu \underbrace{\left|\mathrm{Det}(-\partial_\mu D_\mu)\right|} \exp\left[-\int d^4x_E\left(\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^a_\mu)^2 + J^a_\mu A^a_\mu\right)\right]. \quad \cdots (4)$$

YM場のZ[J]のFP行列式はYM場を含んでしまう。(U(1) gauge との違い)

→ $B^a, c^a, \bar{c}^a$ の導入に至る。

補題 ξ_i : G-数 ($i=1,\dots,n$). $M_{ij}\in GL_n(\mathbb{C})$.

このとき $\displaystyle\int \exp\left[-\sum_{i,j=1}^n \xi_i^\dagger M_{ij}\xi_j\right] d^n\xi\, d^n\xi^\dagger = \det M_{ij}$. $\cdots$ (5)

pf $\xi_i' = M_{ij}\xi_j$ ($i=1,\dots,n$) と変換する。このとき G-数の冪ゼロ性と反可換性より

$$\prod_{i=1}^n \xi_i' = \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^n \left(\mathrm{sgn}(j_1,j_2,\dots,j_n)\prod_{k=1}^n M_{kj_k}\right)\prod_{i=1}^n \xi_i = [\det M_{ij}]\prod_{i=1}^n \xi_i .$$

従って $i^n = \int \prod_{i=1}^n \xi_i'\, d^n\xi' = [\det M_{ij}]\int \prod_{i=1}^n \xi_i\, d^n\xi'$ i.e. $d^n\xi' = [\det M_{ij}]^{-1} d^n\xi$. (Jacobian).

故に
$$\begin{aligned}
\int \exp\left[-\sum_{i,j=1}^n \xi_i^\dagger M_{ij}\xi_j\right] d^n\xi\, d^n\xi^\dagger &= \int \exp\left[-\sum_{i=1}^n \xi_i'^\dagger \xi_i'\right][\det M_{ij}]\, d^n\xi'\, d^n\xi^\dagger \\
&= [\det M_{ij}]\prod_{j=1}^n\left(\int \exp(-\xi_j'^\dagger\xi_j')\, d\xi_j'\, d\xi_j^\dagger\right) \\
&= [\det M_{ij}]\prod_{j=1}^n \int (1-\xi_j'^\dagger\xi_j')\, d\xi_j'\, d\xi_j^\dagger \\
&= \det M_{ij}
\end{aligned}$$

■

(5) より

$$\left|\mathrm{Det}(-\partial_\mu D_\mu)\right| = \mathrm{Det}(-\partial_\mu D_\mu) = \int \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a \exp\left[-\int d^4x_E\, \underbrace{\bar{c}^a}_{\text{反ゴースト}}(-\partial_\mu D_\mu)^{ab}\underbrace{c^b}_{\text{FPゴースト}}\right]$$

これを (4) に代入して部分積分すれば

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a \exp\left[-\int d^4x_E\left(\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \underbrace{\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^a_\mu)^2}_{\text{中西-Lautrup場の導入により消える}} + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu)^{ab} c^b + J^a_\mu A^a_\mu\right)\right] \quad \cdots (6)$$

恒等式

$$1 = \int \mathcal{D}B^a \exp\left[-\frac{\xi}{2}\int d^4x \left(B^a(x) - i\frac{1}{\xi}\partial_\mu A^a_\mu(x)\right)^2\right]$$ を (6) に挿入すれば

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}B^a \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a \exp\left[-\int d^4x_E\left(\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{\xi}{2}(B^a)^2 - iB^a\partial_\mu A^a_\mu + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu)^{ab} c^b + J^a_\mu A^a_\mu\right)\right]. \quad \cdots (7).$$

これで FPゴースト, 反ゴースト, 中西-Lautrup場 (NL場) が導入された。 局所 SU(N) $\xrightarrow{\text{gauge固定}}$ 大域 SU(N) + BRS.

2

2.1. BRS(T) 変換 (→ 冪零でフェルミオニックな変換)

共変gauge固定された Lagrangian 密度 $\mathcal{L}^{(tot)}_{QCD}$ は $\mathcal{L}^{(tot)}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$ で与えられた。

$$\begin{cases}
\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \\
\mathcal{L}_{GF} = B^a\partial^\mu A^a_\mu + \frac{\xi}{2}B^aB^a \\
\mathcal{L}_{FP} = i\bar{c}^a\partial^\mu(\partial_\mu c^a - g f^{abc}A^b_\mu c^c)
\end{cases}$$

i. $\mathcal{L}^{(tot)}_{QCD}$ は 大局的変換
$$\begin{cases}
\delta A^a_\mu = \lambda(D_\mu c)^a \\
\delta c^a = -\frac{1}{2}g f^{abc}c^b c^c\lambda \\
\delta\bar{c}^a = i\lambda B^a \\
\delta B^a = 0
\end{cases}$$
のもとでの不変性を有する。 (λ : G-数)

pf
$$\begin{aligned}
\delta(\underbrace{\partial_\mu c^a - g f^{abc}A^b_\mu c^c}_{(D_\mu c)^a}) &= \partial_\mu\delta c^a - g f^{abc}(\delta A^b_\mu)c^c - g f^{abc}A^b_\mu(\delta c^c) = -\frac{1}{2}g f^{abc}\partial_\mu(c^b c^c)\lambda - g f^{abc}(D_\mu c)^b\lambda c^c + \frac{1}{2}g^2 f^{abc}f^{cde}A^b_\mu c^d c^e\lambda \\
&= -\frac{1}{2}g f^{abc}\{(\partial_\mu c^b)c^c + c^b(\partial_\mu c^c)\}\lambda - g f^{abc}(D_\mu c)^b\lambda c^c + \frac{1}{2}g^2 f^{abc}A^b_\mu f^{cde}c^d c^e\lambda \\
&= -g f^{abc}(\partial_\mu c^b)c^c\lambda - g f^{abc}(D_\mu c)^b\lambda c^c + \frac{1}{2}g^2 f^{abc}A^b_\mu f^{cde}c^d c^e\lambda .
\end{aligned}$$

ここで $f^{abc}(D_\mu c)^b\lambda c^c = f^{abc}\partial_\mu c^b - f^{abc}g f^{bde}A^d_\mu c^e\lambda c^c$ であるから

$$\delta(D_\mu c)^a = -g^2 f^{abc} f^{bde} A_\mu^d c^e c^c \lambda + \frac{1}{2} g^2 f^{abc} A_\mu^b f^{cde} c^d c^e \lambda$$

$$\therefore -\frac{\delta(D_\mu c)^a}{g^2} = f^{abc} f^{bde} A_\mu^d c^e c^c \lambda + \frac{1}{2}\left(f^{adc} f^{ceb} + f^{aec} f^{cbd}\right) A_\mu^b c^d c^e \lambda$$

$$= f^{abc} f^{bde} A_\mu^d c^e c^c \lambda + \frac{1}{2} f^{adc} f^{ceb} A_\mu^b c^d c^e \lambda \cdot 2$$

$$= \left(-f^{abc} f^{bde} + f^{acb} f^{bed}\right) A_\mu^d c^c c^e \lambda$$

$$= 0.$$

一方，$B^a \partial^\mu(\delta A_\mu^a) = B^a \lambda (\partial^\mu D_\mu c)^a$， $\delta(B^a B^a) = B^a \delta B^a + (\delta B^a) B^a = 0$， $i\delta(\bar{c}^a \partial_\mu (D_\mu c)^a) = -\lambda B^a \partial_\mu (D_\mu c)^a$

さらに $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ は gauge 変換 $A_\mu^\nu \mapsto A_\mu^\theta = A_\mu + D_\mu \theta$ で gauge 不変であったから示された．

∎

(ii.) BRS 対称性に対する Noether カレント j^μ，Noether チャージ（BRS 電荷）Q_B は

$$j^\mu = -c^a \partial^\mu B^a + B^a (D^\mu c)^a - \frac{i}{2} g f^{abc} c^a \partial^\mu \bar{c}^b c^c - \partial_\nu (c F^{\mu\nu})^a, \quad Q_B = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[-c^a \partial^0 B^a + B^a (D^0 c)^a - \frac{i}{2} g f^{abc} c^a \partial^0 \bar{c}^b c^c\right].$$

proof Noether カレントは今の場合では場の変化分のみなので場を ϕ_r と書けば $j^\mu(x) = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}^{(\mathrm{tot})}(x)}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r(x) \underbrace{\left(-\delta x_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \partial^\nu \phi_r - g^{\mu\nu} \mathcal{L}\right)\right)}_{=0}$

従って $\lambda j^\mu = \delta A_\nu^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^a)} + \delta c^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu c^a)} + \delta \bar{c}^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{c}^a)} = -\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \delta A_\nu^a F^{a\mu\nu} + \delta A_\nu^a g^{\mu\nu} B^a + i \delta c^a \partial^\mu \bar{c}^a$

$$= -\lambda (D_\nu c)^a F^{a\mu\nu} + \lambda (D^\mu c)^a B^a - \frac{i}{2} g f^{abc} c^b c^c (\partial^\mu \bar{c}^a) \lambda.$$

$$= -\lambda \partial_\nu (c F^{\mu\nu})^a + \lambda c^a (D_\nu F^{\mu\nu})^a + \lambda (D^\mu c)^a B^a - \frac{i}{2} g f^{abc} c^b c^c (\partial^\mu \bar{c}^a) \lambda. \quad \cdots (8)$$

ここで A_μ に関する Euler-Lagrange 方程式 $\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta^i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta^i} = 0$ は

- $\partial_\alpha \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\beta^i)} (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) = \partial_\alpha \left[(g^\alpha_\mu g^\beta_\nu \delta^{ai} - g^\alpha_\nu g^\beta_\mu \delta^{ai})(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} - g f^{amn} A^{m\mu} A^{n\nu}) + (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta^{ai} - g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta} \delta^{ai})\right]$

$$= \partial_\alpha \left[4 \partial^\alpha A^{i\beta} - 4 \partial^\beta A^{i\alpha} - 2 g f^{imn} A^{m\alpha} A^{n\beta} - 2 g f^{ibc} A^{b\alpha} A^{c\beta}\right]$$

$$= 4 \partial_\alpha F^{i\alpha\beta}$$

- $\frac{\partial}{\partial A_\beta^i} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \frac{\partial}{\partial A_\beta^i} \left[(-g f^{abc} g^\beta_\mu \delta^{bi} A_\nu^c - g f^{abc} A_\mu^b g^\beta_\nu \delta^{ci})(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} - g f^{amn} A^{m\mu} A^{n\nu}) + (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)(-g f^{amn} g^{\beta\mu} \delta^{im} A^{n\nu} - g f^{amn} A^{m\mu} g^{\beta\nu} \delta^{ni})\right]$

$$= -4 g f^{aic} A_\nu^c F^{a\beta\nu}$$

- $\partial_\alpha \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\beta^i)} (-i \bar{c}^a g f^{abc} (\partial^\mu A_\mu^b) c^c) = \partial_\alpha \left(-i \bar{c}^a g f^{abc} \delta^{bi} g^{\mu\alpha} g_\mu^\beta \boxed{\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta^i)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta^i)}} c^c\right) = -i g f^{aic} \partial^\beta \bar{c}^a c^c.$

から $-i \bar{c} g f^{aic} \partial^\beta \bar{c}^a c^c - \partial_\alpha F^{i\alpha\beta} + \partial^\beta B^i - g f^{aic} A_\nu^c F^{a\beta\nu} = 0.$ i.e. $(D_\mu F^{\mu\nu})^a - \partial^\nu B^a + i g f^{abc} \partial^\nu \bar{c}^a c^c = 0. \quad \cdots (9)$

(9) を (8) に代入して

$$j^\mu = \underbrace{-c^a (D_\nu F^{\nu\mu})^a}_{\left(-c^a \partial^\mu B^a + i g f^{abc} c^a \partial^\mu \bar{c}^b c^c\right)} + (D^\mu c)^a B^a - \frac{i}{2} g f^{abc} c^b c^c \partial^\mu \bar{c}^a - \partial_\nu (c F^{\mu\nu})^a = -c^a \partial^\mu B^a + B^a (D^\mu c)^a - \frac{i}{2} g f^{abc} c^a \partial^\mu \bar{c}^b c^c - \partial_\nu (c F^{\mu\nu})^a.$$

また $Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, j^0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[-c^a \partial^0 B^a + B^a (D^0 c)^a - \frac{i}{2} g f^{abc} c^a \partial^0 \bar{c}^b c^c\right] - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \partial_0 (c \underbrace{F^{00}}_{0})^a - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \partial_\nu (c F^{0\nu})^a}_{\text{Gaussの定理より } 0}.$

∎

注1. Q_B は もとの BRS 変換の生成子となる： $[i\lambda Q_B, \Phi_I(x)] = \lambda \delta_B \Phi_I(x)$．（$\Phi_I$ は $A_\mu^a, c^a, \bar{c}^a, B^a$）

注2. FP ゴースト場は hermite である．というのも $\mathcal{L}_{QCD}^{(\mathrm{tot})}$ が hermite であることは理論のあらゆる所での無矛盾性にとって不可欠であり，$\mathcal{L}_{QCD}$, $\mathcal{L}_{GF}$ は hermite であるから $\mathcal{L}_{FP}$ 即ち $-i(\partial^\mu \bar{c}^a)(D_\mu c^a)$ は hermite である必要があるので $c^a, \bar{c}^a$: G-数 であることに注意して $c^{a\dagger} = c^a$, $\bar{c}^{a\dagger} = \bar{c}^a$ を得る．

注3. $\mathcal{L}_{QCD}^{(\mathrm{tot})}$ は スケール変換 $\begin{cases} c^a(x) \to e^\rho c^a(x) \\ \bar{c}^a(x) \to e^{-\rho} \bar{c}^a(x) \end{cases}$ の下で不変 $\to$ $\begin{cases} \text{Noether カレント} & j_\mu^{(c)} = i(\bar{c}^a D_\mu c^a - (\partial_\mu \bar{c}^a) c^a) \\ \text{Noether 電荷（FPゴースト電荷）} & Q_c = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x [\bar{c}^a D_0 c^a - (\partial_0 \bar{c}^a) c^a]. \end{cases}$

$\to \begin{cases} [iQ_c, c^a(x)] = c^a(x) \\ [iQ_c, \bar{c}^a(x)] = -\bar{c}^a(x) \end{cases}$ より FPゴースト数演算子 N_{FP} は Q_c の i 倍．さらに Q_c は Q_B と同様 hermite 演算子であり，

従って N_{FP} は反 hermite である．ところが N_{FP} は実数固有値を持つ．(??) $\to$ FPゴーストの状態空間が不定計量を持つため．（後述）

(iii) Q_B, Q_C は次の代数（BRS代数）を満たす：
$$\begin{cases} \{Q_B, Q_B\} = 0 & (\to \delta_B^2 = 0). \\ [iQ_C, Q_B] = Q_B \\ [Q_C, Q_C] = 0. \end{cases}$$

proof. $\lambda\{Q_B, Q_B\} - \underbrace{\{\lambda, Q_B\}}_{0} Q_B = [\lambda Q_B, Q_B] = \frac{1}{2}\lambda\delta_B Q_B = 0$ より $\{Q_B, Q_B\} = 0$. i.e. $Q_B^2 = 0$.

一方 $\lambda\delta_B(\lambda'\Phi) = [i\lambda Q_B, [i\lambda' Q_B, \Phi]] = \{iQ_B, [iQ_B, \Phi]\}\lambda\lambda' = -[\underbrace{Q_B^2}_{0}, \Phi]\lambda\lambda'$ i.e. $\delta_B^2\Phi = -[Q_B^2, \Phi] = 0$

（ここで Φ:B としたが Φ:F でも同様）

より $\delta_B^2 = 0 \longrightarrow$ BRS変換の冪零性.

さらに Q_B の FP ゴースト数は $Q_B = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[-\underset{1}{\underset{\sim}{c^a}}\partial^0 B^a + B^a(D^0 \underset{1}{\underset{\sim}{c}})^a - \frac{i}{2}gf^{abc}\underset{-1}{\underset{\sim}{\bar{c}^a}}... \right]$ より 1.

$$Q_B = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \Big[-\underbrace{c^a}_{1}\partial^0 B^a + B^a(D^0 \underbrace{c}_{1})^a - \frac{i}{2}gf^{abc}\underbrace{c^a}_{1}\partial^0\underbrace{\bar{c}^b}_{-1}\underbrace{c^c}_{1}\Big]$$ より 1

であるから $[N_{FP}, Q_B] = Q_B$.

Q_C の FP ゴースト数は $Q_C = i\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\underbrace{\bar{c}^a}_{-1} D_0 \underbrace{c^a}_{1} - (\partial_0 \underbrace{\bar{c}^a}_{-1})\underbrace{c^a}_{1}\right]$ より 0. であるから $[N_{FP}, Q_C] = 0$.

$\square$

2.2. 4 重項機構.

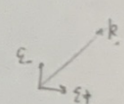
- BRS変換に対して不変な状態ベクトル, 即ち Q_B が 0 の状態ベクトルを<u>物理的状態ベクトル</u>と呼び, これらのベクトルが成す部分空間を<u>物理的状態空間</u>と呼び V_{phys} と表す. $(V_{phys} = \{|f\rangle \mid Q_B|f\rangle = 0\})$

- 物理的粒子空間の導入.

散乱系においては無限過去と無限未来で自己相互作用以外の相互作用が切れ, 繰り込まれた場が自由場に漸近すると考える. <u>漸近場</u>の運動方程式は $\xi=1$ gauge において $\square A^{a\mu}_{as}(x) = 0$, $\square c^a_{as}(x) = 0$, $\square \bar{c}^a_{as}(x) = 0$. また $B^a = -\partial^\mu A^a_\mu$.

$\to$ $\xi \neq 1$ の場合 $\square A^a_\mu = (1-\xi)\partial_\mu B^a$.

よって一般解は
$$\begin{cases} A^{a\mu}_{as}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_\lambda \left(\varepsilon^\mu_\lambda(k) a^a_\lambda(k) e^{-ik\cdot x} + c.c.\right) \\ c^a_{as}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \left(c^a(k) e^{-ik\cdot x} + c.c.\right) \\ \bar{c}^a_{as}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \left(-i\bar{c}^a(k) e^{-ik\cdot x} + c.c.\right) \end{cases}$$



但し $\lambda = \overset{\text{横波}}{\pm}, \overset{\text{縦波}}{L}, \overset{\text{スカラー}}{S}$ で
$$\begin{cases} \varepsilon^\mu_\pm(k) = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_\pm(k))_\mu, \quad |\boldsymbol{\varepsilon}_\pm(k)| = 1, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\pm(k) = \boldsymbol{\varepsilon}_+(k)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_-(k) = 0. \\ \varepsilon^\mu_L = k^\mu, \quad \varepsilon^\mu_S = \frac{-k_\mu}{2|\boldsymbol{k}|^2}, \end{cases}$$
と選んだ.

$$\left(\text{例えば} \quad \varepsilon^\mu_\pm(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^\mu_L = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{k}| \\ 0 \\ 0 \\ -|\boldsymbol{k}| \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^\mu_S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2|\boldsymbol{k}|} \end{pmatrix}. \right)$$

このとき $\partial_\mu \varepsilon^\mu_\lambda(k)\varepsilon^\nu_{\lambda'}(k) = -\eta_{\lambda\lambda'}$, $\eta_{\lambda\lambda'}\varepsilon^\mu_\lambda(k)\varepsilon^\nu_{\lambda'}(k) = -g^{\mu\nu}$, $\eta = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & L & S \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ が成立つ.

一方, $\mathcal{L}_{free} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)^2 + B^a\partial^\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}B^a B^a + i\bar{c}^a\partial^\mu\partial_\mu c^a$ より

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^a_0)} = B^a = -\partial^\mu A^a_\mu$, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^a_i)} = -F^{a0i}$, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 c^a)} = -i\partial^0\bar{c}^a$, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{c}^a)} = i\partial^0 c^a$. 従って

$$\begin{cases} [A^{a\mu}_{as}(x), \dot{A}^{b\nu}_{as}(x')]_{t=t'} = -i\delta^a_b g^{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ \{\bar{c}^a_{as}(x), \dot{c}^b_{as}(x')\}_{t=t'} = -\{c^a_{as}(x), \dot{\bar{c}}^b_{as}(x')\}_{t=t'} = \delta^a_b\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \end{cases}, \quad \begin{cases} [a^a_\lambda(k), a^b_{\lambda'}(k')^\dagger] = \delta^a_b\eta_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3 2k^0\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \\ \{c^a(k), \bar{c}^b(k')^\dagger\} = -\{\bar{c}^a(k), c^b(k')^\dagger\} = \delta^a_b(2\pi)^3 2k^0\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'). \end{cases} \quad \cdots (10)$$

が分かる. (10) より

- $|a^a_L(k)^\dagger|0\rangle| = \left(\langle 0|a^a_L(k)a^a_L(k)^\dagger|0\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\langle 0|a^a_L(k)^\dagger a^a_L(k)|0\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = 0$, • $|a^a_S(k)^\dagger|0\rangle| = 0$
- $|c^a(k)^\dagger|0\rangle| = \left(\langle 0|c^a(k)c^a(k)^\dagger|0\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = \left(-\langle 0|c^a(k)c^a(k)^\dagger|0\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = 0$, • $|\bar{c}^a(k)^\dagger|0\rangle| = 0$.

であり, 一方で

- $|(a^a_L(k)^\dagger - a^a_S(k)^\dagger)|0\rangle| = \Big(\langle 0|\underbrace{a^a_L(k)a^a_L(k)^\dagger}_{a^a_L(k)^\dagger a^a_L(k) \to 0} - a^a_S(k)a^a_L(k)^\dagger - \underbrace{a^a_L(k)a^a_S(k)^\dagger}_{\underbrace{a^a_S(k)^\dagger a^a_L(k)}_{\to 0} + (2\pi)^3 2k^0\delta^3(0)} + \underbrace{a^a_S(k)a^a_S(k)^\dagger}_{\to 0}|0\rangle\Big)^{\frac{1}{2}} = \left(\langle 0|-32\pi^3 k^0\delta^3(0)|0\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$

$\longrightarrow$ 負のノルム自乗を持つ.

- $(c^a(k)^\dagger - \bar{c}^a(k)^\dagger)|0\rangle$ も同様に負のノルム自乗を持つ.

$\longrightarrow$ これら漸近場のなす状態空間は<u>不定計量空間</u>

$a_\pm^a(k)^\dagger$ と 物質場(の漸近場)の生成演算子 のみで作られた状態ベクトル は必ず正ノルムであり, これらが張る部分空間は正定値計量空間となる. この部分空間を $\mathcal{H}_{phys}$ と書き, 物理的粒子空間 という.

注. 漸近場において真空は BRS 不変.

・1, 4重項演算子

$[i\lambda Q_B, A^{a\mu}] = \lambda D^\mu c^a$, $[i\lambda Q_B, c^a] = -\frac{1}{2} g\lambda f_{abc} c^b c^c$, $[i\lambda Q_B, \bar{c}^a] = i\lambda B^a = -i\lambda\partial_\mu A^{\mu a}$.

であったが漸近場においては $g\to 0$ として

$$[Q_B, A^{a\mu}_{as}] = -i\partial^\mu c^a_{as}, \quad \{Q_B, c^a_{as}\} = 0, \quad \{Q_B, \bar{c}^a_{as}\} = -\partial_\mu A^{a\mu}_{as}$$

となる 漸近場の平面波展開の式を代入して

$$[Q_B, a_\pm^a(k)] = [Q_B, a_S^a(k)] = 0, \quad [Q_B, a_L^a(k)] = -c^a(k), \quad \{Q_B, c^a(k)\} = 0, \quad \{Q_B, \bar{c}^a(k)\} = a_S^a(k).$$

このとき $a_L^a(k) \xrightarrow{Q_B} c^a(k) \xrightarrow{Q_B} 0$, $\bar{c}^a(k) \xrightarrow{Q_B} a_S^a(k) \xrightarrow{Q_B} 0$ と推移する.

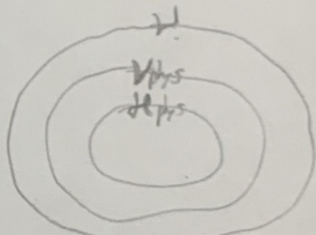
→ 2組 $(a_L^a(k), a_S^a(k)), (c^a(k), \bar{c}^a(k))$ を 4重項演算子 という.

一方, gauge場の横波モードについては $a_\pm^a(k) \xrightarrow{Q_B} 0$. であり, かつ任意の演算子Xに対し $X \not\xrightarrow{Q_B} a_\pm^a(k)$

→ $a_\pm^a(k)$ を 1重項演算子 という.

$\mathcal{H}_{phys}$ は真空に1重項演算子のみを作用して得られる状態ベクトルにより張られる空間であり, これは Fock空間 $\mathcal{V}$ そのものである.

明らかに. $\mathcal{V} \supset \mathcal{V}_{phys} \supset \mathcal{H}_{phys}$.



例. $0, |0\rangle, a_\pm^a(k)^\dagger|0\rangle, a_\pm^a(k)^\dagger a_\pm^b(k')^\dagger|0\rangle \in \mathcal{H}_{phys}$.

$a_S^a(k)^\dagger|0\rangle$, $c^a(k)^\dagger|0\rangle$, $a_L^a(k)^\dagger a_S^b(k')^\dagger|0\rangle + c^a(k)^\dagger \bar{c}^b(k')^\dagger|0\rangle \in \mathcal{V}_{phys}\setminus\mathcal{H}_{phys}$.

$a_L^a(k)^\dagger|0\rangle$, $\bar{c}^a(k)|0\rangle$, $a_L^a(k)^\dagger a_S^b(k')^\dagger|0\rangle$, $c^a(k)^\dagger \bar{c}^b(k')^\dagger|0\rangle \in \mathcal{V}\setminus\mathcal{V}_{phys}$.

実際, $Q_B(a_L^a(k)^\dagger a_S^b(k')^\dagger|0\rangle) = (Q_B a_L^a(k)^\dagger) a_S^b(k')^\dagger|0\rangle + a_L^a(k)^\dagger (Q_B a_S^b(k'))|0\rangle = -c^a(k)^\dagger a_S^b(k')^\dagger|0\rangle$ $\big\}\notin \mathcal{V}_{phys}\setminus\mathcal{H}_{phys}$, $\big\}\in \mathcal{V}\setminus\mathcal{V}_{phys}$

$Q_B(c^a(k)^\dagger \bar{c}^b(k')^\dagger|0\rangle) = \cdots\cdots \; c^a(k)^\dagger a_S^b(k')^\dagger|0\rangle$ $\big\}\notin \mathcal{V}_{phys}\setminus\mathcal{H}_{phys}$, $\big\}\in \mathcal{V}\setminus\mathcal{V}_{phys}$.

である.

Thm 任意の $|f\rangle\in\mathcal{V}_{phys}$ に対し ある $|g\rangle\in\mathcal{V}$ が存在し, $|f\rangle = P_0|f\rangle + Q_B|g\rangle$ が成り立つ. (分解定理)

但し P_0 は $\mathcal{H}_{phys}$ への射影演算子で, $\phi_i(k)$ を1重項演算子として次のように表される:

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| + \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\sum_i \phi_i(k)^\dagger|0\rangle\langle 0|\phi_i(k) + \frac{1}{2!}\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0}\sum_{i_1, i_2}\phi_{i_2}^\dagger(k_1)\phi_{i_1}^\dagger(k_2)|0\rangle\langle 0|\phi_{i_1}(k_1)\phi_{i_2}(k_2) + \cdots$$

prof.

$$T_n := \frac{1}{n}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\left(a_S^a(k)^\dagger T_{n-1} a_L^a(k) + \bar{c}^a(k)^\dagger T_{n-1} c^a(k) + c.c.\right) \quad (n\geq 1), \quad T_0 := |0\rangle\langle 0|$$

は 4重項粒子が n 個存在する部分空間への射影演算子である. また $R_n := \frac{1}{n}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\left(\bar{c}^a(k)^\dagger T_{n-1} a_L^a(k) + c.c.\right)$ とおく.

補題 $n\geq 1$ に対し次が成り立つ;

(i) $[Q_B, T_{n-1}] = 0$

(ii) $\{Q_B, R_n\} = T_n$

prof. $n=1$ のとき $Q_B T_0 = T_0 Q_B = 0$; $\{Q_B, R_1\} = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\left(a_S^a(k)^\dagger|0\rangle\langle 0|a_L^a(k) + \bar{c}^a(k)^\dagger|0\rangle\langle 0|c^a(k) + c.c.\right) = T_1$.

$n=k$ で (i), (ii) が成り立つとすると,

$[Q_B, T_k] = [Q_B, \{Q_B, R_k\}] = 0$. ($\because Q_B^2 = 0$) 従って (i) は示された.

また, $[Q_B, \{Q_B, R_k\}] = [Q_B, T_k] = 0$ より $\{Q_B, R_k\} = \alpha T_k$. 一方 $\{Q_B, R_1\} = T_1$ より 帰納的に $\alpha = 1$. (ii) は示された.

∎

結局 $|f\rangle\in\mathcal{V}_{phys}$ のとき

$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} T_n|f\rangle = T_0|f\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\{Q_B, R_n\}|f\rangle = P_0|f\rangle + Q_B\sum_{n=1}^{\infty}R_n|f\rangle$ であるから $|g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}R_n|f\rangle$ とすれば良い.

∎

物理的状態 $|phys\rangle$ は上の議論から $Q_B|phys\rangle=0$ を満たし，（九後・小嶋の補助条件）また Q_B は保存量なので始状態で系が物理的状態にあれば終状態でも物理的状態になる．さらに，分解定理より　始状態：$|f\rangle$，終状態：$|f_0\rangle$ として $|f\rangle \in \mathcal{H}_{phys}$ $\in \mathcal{H}_{phys}$

$|f_0\rangle = P_0|f\rangle + Q_B|g\rangle$ と展開できる．

$$\begin{aligned}\langle f_0|f_0\rangle &= \left(\langle f|P_0 + \langle g|Q_B\right)\left(P_0|f\rangle + Q_B|g\rangle\right)\\ &= \langle f|f\rangle + \langle f|P_0Q_B|g\rangle + \langle g|Q_BP_0|f\rangle + \langle g|Q_B^2|g\rangle\\ &= \langle f|f\rangle\end{aligned}$$

ので遷移確率は $\mathcal{H}_{phys}$ の中だけで評価可能．

以上のことから，4重項粒子，即ち gauge 場の縦波モード，スカラー粒子，そして FP ゴースト粒子は中間状態にしか存在し得ない．

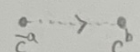
ことが分かる．$\longrightarrow$ 4重項機構．

2.3．非可換ゲージ場の経路積分．

（詳細な計算は省略する）

生成汎関数は　$Z=\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c \exp\left[i\int d^4x \mathcal{L}_{eff}\right]$，　$\mathcal{L}_{eff}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_G+\mathcal{L}_{FP}$，　$\begin{cases}\mathcal{L}_0=-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2,\ \mathcal{L}_G=-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2\\ \mathcal{L}_{FP}=-\bar{c}^a\partial^\mu\left(\partial_\mu c^a - gf^{abc}A^b_\mu c^c\right).\end{cases}$

従って　$\mathcal{L}_{eff}=-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2-\bar{c}^a\delta^{ab}\Box c^b - gf^{abc}(\partial^\mu\bar{c}^a)A^c_\mu c^b.$　$\cdots(\bigstar)$

これよりゴーストの伝播関数　　：$\boxed{\dfrac{i\delta_{ab}}{k^2}}$　を得る．

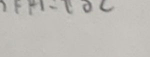
Step1．$(\bigstar)$ を自由ゲージ場　$\mathcal{L}^F_0=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a})-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2$　，$\mathcal{L}^{FP}_0=-\bar{c}^a\delta^{ab}\Box c^b.$

相互作用　$\mathcal{L}_{int}=-\frac{1}{2}gf^{abc}(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a})A^b_\mu A^c_\nu-\frac{1}{4}g^2f^{abc}f^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d}A^{\nu e}-gf^{abc}(\partial^\mu\bar{c}^a)c^bA^c_\mu.$

に分離し，摂動展開を行う．（フェルミオンがいるとき $\mathcal{L}^F$ に $\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi$，$\mathcal{L}_{int}$ に $g\bar{\psi}\gamma^\mu A^i_\mu T^i\psi$ を加えるだけ．）

$Z=\left(1+i\int d^4x\mathcal{L}_{int}+\cdots\right)Z_0$，　$Z_0=Z^F_0Z^{FP}_0$　，　$Z^F_0[J]=\int\mathcal{D}A\exp\left[i\int d^4x\left(\mathcal{L}^F_0+A\cdot J\right)\right]$

$Z^{FP}_0[\eta,\bar{\eta}]=\int\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\eta}\exp\left[i\int d^4x\left(\mathcal{L}^{FP}_0+\bar{c}\eta+\bar{\eta}c\right)\right].$

ここで　$Z^F_0[J]=\mathrm{Det}(\cdot)\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\left(J^{a\mu}(x)D^{ab}_{\mu\nu}(x-y)J^{b\nu}(y)\right)\right]$　なので　ボソン伝播関数　　$\boxed{-i\delta_{ab}\left(\dfrac{g_{\mu\nu}}{k^2}-(1-\xi)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^4}\right)}$

を得る．

$Z^{FP}_0[\eta,\bar{\eta}]=\mathrm{Det}(\cdot)\exp\left[-i\int d^4xd^4y\left(\bar{\eta}^a(x)D^{ab}(x-y)\eta^b(y)\right)\right]$　なので　と同じ，

Step2．$\mathcal{L}_{int}$ からありうるのは　B,F,F 頂点，　B,B,B 頂点，B,B,B,B 頂点．

まずは B,F,F 場の相互作用に関して．

必要なラグランジアンは　$\mathcal{L}^{(BFF)}_{int}=-gf^{abc}(\partial^\mu\bar{c}^a)c^bA^c_\mu.$　これを $Z_0=Z^F_0Z^{FP}_0$ に作用させると

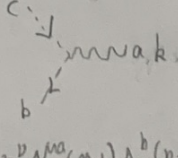
$$Z^{(0)}_{BFF}=-i\int d^4x\left[gf^{abc}\left(\partial^\mu\left(-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta^a(x)}\right)\right)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^b(x)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^c_\mu(x)}\right]Z^G_0[J]Z^{FP}_0[\eta,\bar{\eta}].$$

$$\sim -igf^{abc}\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4x_2\left(D^{cb_1}_{\mu\nu}(x-y_1)D^{bb_2}(x-y_2)D^{aa_2}(x_2-x)J^{b_1\nu}(y_1)\eta^{b_2}(y_2)\bar{\eta}^{a_2}(x_2)\right)Z_0.$$

$\left(:=\tilde{Z}^{(0)}_{BFF}\right)$

B-F-F 場の3点関数は，$G^{(3)}=\left(-\frac{1}{i}\right)^3\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{\delta\eta}\frac{\delta}{\delta J^\mu}\tilde{Z}^{(0)}_{BFF}\Big|_{J^\mu,\eta,\bar{\eta}=0.}$　より

$$G^{a_1a_2a_3(3)}(z_1,z_2,z_3)=gf^{abc}\int\frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^8}k_{1\mu}e^{i(-k_1z_1+k_2z_2+kz_3)}iD^{ca_3}_{\mu\nu}(x-z_3)iD^{ba_2}(x-z_2)iD^{aa_1}(z_1-x)$$

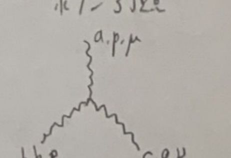
より　ボソン・ゴースト・ゴースト頂点　　$\boxed{gf_{abc}k_\mu}$

次に B,B,B 頂点の場合．

$$i\frac{\delta^3}{\delta A^{\rho i}_{(p_1)}\delta A^{\lambda j}_{(p_2)}\delta A^{\tau k}_{(p_3)}}\left\{-\frac{1}{2}gf^{abc}\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3\left(ip_1^\mu A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^{\mu a}(p_1)\right)A^b_\mu(p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3)\right.$$

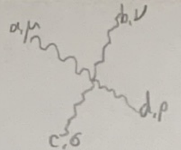
$$\underset{(p\to k)}{\sim}-gf^{ijk}\left[(k_{3\lambda}-k_{1\lambda})g^{\rho\tau}+(k_{2\rho}-k_{3\rho})g^{\lambda\tau}+(k_{1\tau}-k_{2\tau})g^{\rho\lambda}\right](2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)$$

ボソン3頂点



$$\boxed{gf_{abc}\left[g^{\mu\nu}(p-q)^\rho+g^{\nu\rho}(q-k)^\mu+g^{\rho\mu}(k-p)^\nu\right]}$$

さらに, B.B.B.B頂点の場合. 略. → ボソン4点頂点

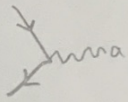


$$\boxed{-ig^2\left[f_{abe}f_{cde}(g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})+f_{ace}f_{bde}(g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})+f_{ade}f_{bce}(g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho}-g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\right]}$$

最後に $\mathcal{L}_{int}^{(f)}=\bar{\psi}^i(g\gamma^\mu A_\mu^a T^a)\psi^j$ の部分からの頂点は

運動量表示 $\int d^dp_1 d^dp_2 d^dp_3\, \bar{\psi}^i(p_1)(g\gamma^\mu A_\mu^a(p_2)T^a)\psi^j(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3)$ に直して $\bar{\psi},\psi,A_\mu$ で汎関数微分して i つけて

ボソン・フェルミオン・フェルミオン頂点

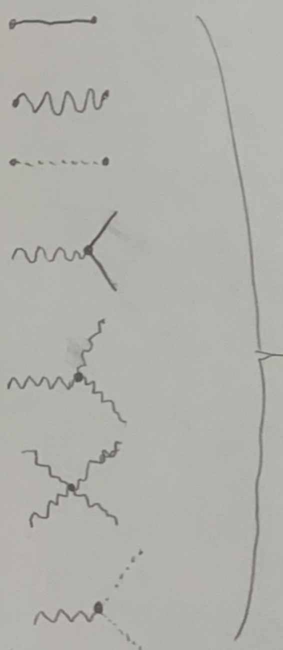


$\boxed{ig\gamma^\mu T^a}$ を得る.

注. フェルミオンのループがあれば Tr をつけ, ゴーストのループに対しては − をつける. (反交換し, γ行列とは異なるものであるから)

2.4. 格子ゲージ理論へ.

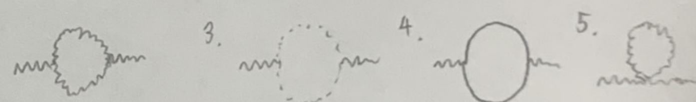
2.4.1. 非可換ゲージ場における 1-loop 計算. (詳細な計算は略)



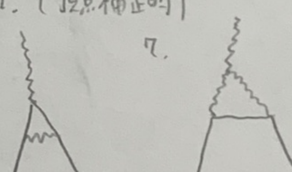
から, 非可換ゲージで現れる 1-loop 図は次の7つ:

1. (自己エネルギー的)

2.3.4.5 (真空偏極的)

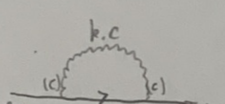


6.7. (頂点補正的)



以下, ε に 4-d とする. また ≐ は特異点を持つ項以外は無視していることを表す.

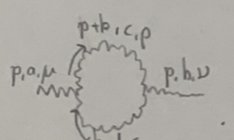
1.



$$\Sigma^{ab}(p)=-ig^2\mu^{4-d}(t^c)_{ad}(t^c)_{db}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\gamma^\mu\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m}\frac{1}{k^2}\left(g_{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\gamma^\nu.$$

$$\doteq\frac{1}{\varepsilon}\frac{g^2}{6\pi^2}(-\not{p}+4m)\delta_{ab}.$$

2.

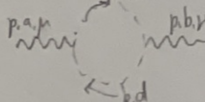


$$[g_{\nu\rho}(p+(p+k))_\sigma+g_{\rho\sigma}(-(p+k)-k)_\nu+g_{\sigma\nu}(k-p)_\rho]\times[g^\sigma_\nu(-p+k)^\rho+g^{\sigma\rho}(-k-(p+k))_\nu+g^\rho_\nu(p+k+p)^\sigma].$$

$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\frac{1}{2}g^2\mu^{4-d}f^{acd}f^{bdc}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{A_{\mu\nu}}{(p+k)^2k^2}$$

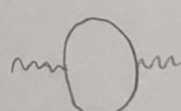
$$\doteq\frac{1}{\varepsilon}\frac{g^2}{(4\pi)^2}f^{acd}f^{bdc}\left(\frac{11}{3}p_\mu p_\nu-\frac{19}{6}g_{\mu\nu}p^2\right).$$

3.



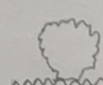
$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{g^2}{(4\pi)^2}f^{acd}f^{bdc}\left(\frac{1}{3}p_\mu p_\nu+\frac{1}{6}g_{\mu\nu}p^2\right)$$

4.



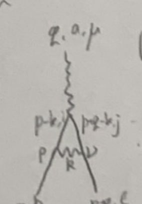
$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{g^2}{6\pi^2}\frac{N_f}{2}\delta^{ab}(p_\mu p_\nu-g_{\mu\nu}p^2).$$

5.



$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}=0.$$

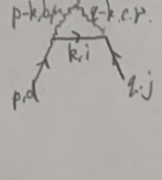
6.



$$(\Gamma^a_\mu)_{cb}=\frac{1}{ig}(ig\mu^{2-\frac{d}{2}})^3(T^d)_{cj}(T^a)_{ji}(T^d)_{ib}\times\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\gamma_\nu\frac{i}{\not{p}+\not{q}-\not{k}-m}\gamma_\mu\frac{i}{\not{p}-\not{k}-m}\gamma_\rho\frac{-ig^{\nu\rho}}{k^2}$$

$$\doteq-\frac{1}{\varepsilon}\frac{g^2}{48\pi^2}\gamma_\mu T_a.$$

7.



$$\Gamma^a_\rho=\frac{1}{\varepsilon}\frac{9g^2}{16\pi^2}\gamma_\rho T_a.$$

1.〜7. より

$$\Gamma^a_\mu=\frac{13g^2}{24\pi^2\varepsilon}\gamma_\mu T_a\quad,\quad\Sigma(p)=\frac{g^2}{6\pi^2\varepsilon}(-\not{p}+4m)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(p)=\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}\left(\frac{2}{3}N_f-5\right)(p_\mu p_\nu-g_{\mu\nu}p^2)$$

故に $Z_1 = 1 - \frac{13g^2}{24\pi^2\epsilon}$，$Z_2 = 1 - \frac{g^2}{6\pi^2\epsilon}$，$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}\left(\frac{2}{3}N_f - 5\right)$. と計算された.

裸の結合定数を g_B, 繰り込まれた結合定数を g とすれば

$$g_B = \mu^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{Z_1}{Z_2\sqrt{Z_3}} g \simeq \mu^{\frac{\epsilon}{2}}\left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)\right) g.$$

$\frac{\partial g_B}{\partial \mu} = 0$ より $0 = \frac{\epsilon}{2}\mu^{\frac{\epsilon}{2}-1}\left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)\right) g + \mu^{\frac{\epsilon}{2}}\frac{\partial g}{\partial \mu}\left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)\right) - \mu^{\frac{\epsilon}{2}}\frac{\partial g}{\partial \mu}\frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)$

i.e. $$\frac{\partial g}{\partial \mu} = -\frac{\epsilon}{2\mu} g\left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)\right)\left(1 - \frac{3g^2}{16\pi^2\epsilon}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)\right)^{-1}$$

$$\simeq -\frac{g}{\mu}\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{g^2}{16\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)\right)$$

$$\xrightarrow[\epsilon\to 0]{} -\frac{1}{\mu}\frac{g^3}{16\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right).$$

故に 非可換ゲージ場の 1-loop β関数は $\beta = \mu\frac{\partial g}{\partial \mu} = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)$ となる … (*)

2.4.2. 摂動論の問題点.

(*) より $N_f \leq 16$ のとき $\beta < 0$ → フレーバー数が 16 を超えなければ 理論は漸近的自由である.

→ 高エネルギー側では 摂動展開の精度が高い.

ところが 低エネルギー側では 強結合となってしまい 摂動論が使えない.

→ 格子場の理論のような非摂動的な方法が必要になる.

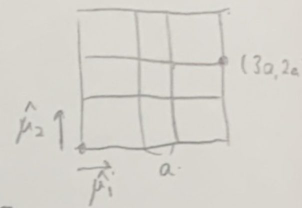
7.4.2. 格子ゲージ理論.

1. まずはスカラー場の理論を格子上で考える. Euclid化された ϕ^4 理論の作用は $S = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g^4}{4!}\phi^4 \right)$.

n を $(n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ で表せば 格子点は格子間隔 a を用いて $na = (n_1 a, n_2 a, \dots, n_d a)$ と表される.

格子点 na でのスカラー場は $\phi(na)$ で与えられるが, その点でのスカラー場の微分は対称差分を用いて

$$\partial_\mu \phi(x) \longrightarrow \frac{1}{2a}\left[\phi((n+\hat{\mu})a) - \phi((n-\hat{\mu})a)\right]$$ で与えられる.



故に格子空間での作用 S_{lattice} は

$$S = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g^4}{4!}\phi^4 \right) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \left(-\frac{1}{2}\phi\,\partial_\mu^2\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g^4}{4!}\phi^4 \right)$$

$$\to S_{\text{lattice}} = a^d \sum_n \left(-\frac{\phi(na)}{2}\left[\sum_\mu \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{2a}\{\phi((n+2\hat{\mu})a) - \phi(na)\} - \frac{1}{2a}\{\phi(na) - \phi((n-2\hat{\mu})a)\}\right]\right] + \frac{1}{2}m^2\phi^2(na) + \frac{g^4}{4!}\phi^4(na) \right)$$

$$= a^{d-4}\sum_n \left[-\frac{a\phi(na)}{2}\left[\sum_\mu \left(\phi((n+\hat{\mu})a) + \phi((n-\hat{\mu})a) - 2\phi(na)\right)a\right] + \frac{(ma)^2}{2}(a\phi(na))^2 + \frac{g^4}{4!}(a\phi(na))^4 \right],$$

ここで 無次元化された場 $\phi_L(n) := a\phi(na)$ 及び 質量 $M := am$ を導入すれば

$$Z_{\text{lattice}}[J] = \int \prod_n d\phi_L(n)\, e^{-S_{\text{lattice}}} = \int \prod_n d\phi_L(n) \exp\left[\sum_{n,\hat{\mu}} \phi_L(n)\phi_L(n+\hat{\mu}) - \sum_n V(\phi_L(n))\right].$$ $V(\phi_L(n)) = \frac{M^2+2d}{2}\phi_L^2(n) + \frac{g^4}{4!}\phi_L(n)^4 - J(n)\phi_L(n)$

さらに $Z^H_{\text{lattice}}[J] := (M^2+2d)^{\frac{\#V}{2}}$, $g_H := \frac{g}{\sqrt{M^2+2d}}$, $\phi_H(n) := \sqrt{M^2+2d}\,\phi_L(n)$ とすれば

$$Z^H_{\text{lattice}}[J] = \int \prod_n d\phi_H(n) \exp\left[\sum_{n,\hat{\mu}} K\phi_H(n)\phi_H(n+\hat{\mu}) - \sum_n V^H(\phi_H(n))\right]$$, $V^H(\phi(n)) = \frac{1}{2}\phi_H(n)^2 + \frac{g_H^4}{4!}\phi_H(n)^4 - \frac{J(n)}{\sqrt{M^2+2d}}\phi_L(n)$

$\longrightarrow$ $|K|$ が小さい (質量が大きい) と 格子隣との相互作用が弱く, 情報が伝播しにくい. (直感と一致)

2. Euclid化された $\mathcal{L} = \sum_\mu \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi + \sum_{\mu,\nu} \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}^2$. の場合を考える.

- $U(x, x+\Delta x) := P\exp\left[ig\int_x^{x+\Delta x} A_\mu(y)\,dy\right]$ に対し $\bar{\psi}(x)U(x, x+\Delta x)\psi(x+\Delta x)$ は gauge 不変.

proof. gauge 変換 $\Omega(x) \in SU(N)$ に対し $A_\mu(x) \mapsto \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^\dagger(x) + \frac{1}{ig}\Omega(x)\partial_\mu\Omega^\dagger(x)$ と変換するので $U(x, x+\Delta x)$ は

$$U(x, x+\Delta x) = P\exp\left[ig\int_x^{x+\Delta x} A_\mu(y)\,dy\right] \mapsto P\exp\left[ig\int_x^{x+\Delta x}\Omega(y)A_\mu(y)\Omega^\dagger(y)\,dy + \int_x^{x+\Delta x}\Omega(y)\partial_\mu\Omega^\dagger(y)\,dy\right]$$

$$= P\exp\left[ig\int_x^{x+\Delta x}\Omega(y)\left(A_\mu(y) + \partial_\mu\right)\Omega^\dagger(y)\,dy\right]$$

$$= \Omega(x)P\exp\left[ig\int_x^{x+\Delta x}A_\mu(y)\,dy\right]\left(\Omega^\dagger(x) + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!}\frac{\partial^k\Omega^\dagger(x)}{\partial x^k}(\Delta x)^k\right)$$

$$= \Omega(x)U(x, x+\Delta x)\Omega^\dagger(x+\Delta x)$$

と変換する. 一方 $\psi \mapsto \Omega(x)\psi$, $\bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}\Omega^\dagger(x)$ より

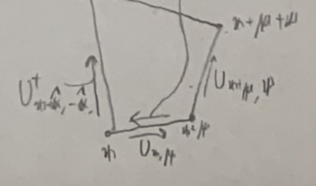
$$\bar{\psi}(x)U(x, x+\Delta x)\psi(x+\Delta x) \mapsto \bar{\psi}(x)\Omega^\dagger(x)\Omega(x)U(x, x+\Delta x)\Omega^\dagger(x+\Delta x)\Omega(x+\Delta x)\psi(x+\Delta x)$$

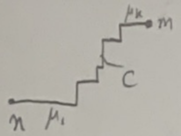
$$= \bar{\psi}(x)U(x, x+\Delta x)\psi(x+\Delta x)$$ ∎

この連続理論の考察をヒントに 格子点 n から μ 方向へのびるリンク上に リンク変数 $U_{n,\hat{\mu}} = \exp\left[iga\,A_{\hat{\mu}}(n)\right]\ (\in SU(N))$.

を導入する. gauge 変換によって $U_{n,\hat{\mu}} \mapsto U^g_{n,\hat{\mu}} = g_n U_{n,\hat{\mu}}\, g^\dagger_{n+\hat{\mu}}$. $(g_n \in SU(N))$ と変換する.

$U_{n+\hat{\mu},-\hat{\mu}} = U^\dagger_{n,\hat{\mu}}$.

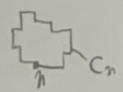




このとき左図のような経路 $C(n\to m)$ で $\prod_C U := U_{n,\mu_1}U_{n+\mu_1,\mu_2}\cdots U_{m-\mu_k,\mu_k} \mapsto g_n\left(\prod_C U\right)g_m^\dagger$ と変換するので

経路 $C_n(n\to n)$ で $\prod_C U \mapsto g_n\left(\prod U\right)g_n^\dagger \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\prod_{C_n} U\right)$ は gauge 不変.

(Wilson loop $W(C_n) := \mathrm{Tr}\left[P\exp\left(ig\oint_{C_n} A_\mu dx^\mu\right)\right]$ は gauge 不変量であることが分かる)



閉じたループとして一番簡単なものは最小の正方形 (plaquette : プラケット) である.

いま, プラケット変数 $P_{\hat\mu\hat\nu}(n) := \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left[\underbrace{U_{n,\hat\mu}U_{n+\hat\mu,\hat\nu}U^\dagger_{n+\hat\nu,\hat\mu}U^\dagger_{n,\hat\nu}}_{=:p_{\hat\mu\hat\nu}(n)}\right]$ を導入する.

- $S_G := -\frac{N}{g^2}\sum_n\sum_{\mu\neq\nu}P_{\mu\nu}(n)$ は $a\to 0$ で グルーオン場の作用に一致する.
  (ダイナミクスに寄与しない定数項を除いて)

<u>proof</u>.
$$
\left.\begin{aligned}
U_{n,\hat\mu} &\simeq \exp\left[igaA_{\hat\mu}\left(n+\tfrac{\hat\mu}{2}\right)\right] \doteq \exp\left[igaA_\mu(n)+\tfrac{iga^2}{2}\partial_\mu A_\mu(n)\right]\\
U_{n+\hat\mu,\hat\nu} &\simeq \exp\left[igaA_{\hat\nu}\left(n+\hat\mu+\tfrac{\hat\nu}{2}\right)\right] \doteq \exp\left[igaA_{\hat\nu}(n)+iga^2\partial_\mu A_\nu(n)+\tfrac{iga^2}{2}\partial_\nu A_\nu(n)\right]\\
U^\dagger_{n+\hat\nu,\hat\mu} &\doteq \exp\left[-igaA_\mu\left(n+\hat\nu+\tfrac{\hat\mu}{2}\right)\right] \doteq \exp\left[-igaA_{\hat\mu}(n)-iga^2\partial_\nu A_\mu(n)-\tfrac{iga^2}{2}\partial_\mu A_\mu(n)\right]\\
U^\dagger_{n,\hat\nu} &\doteq \exp\left[-igaA_\nu\left(n+\tfrac{\hat\nu}{2}\right)\right] \doteq \exp\left[-igaA_\nu(n)-\tfrac{iga^2}{2}\partial_\nu A_\nu(n)\right],
\end{aligned}\right)\quad (\text{as. } a\to 0)
$$

CBH 公式により
$$
U_{n,\hat\mu}U_{n+\hat\mu,\hat\nu} = \exp\left[iga\left(A_\mu(n)+A_\nu(n)+\tfrac{iga^2}{2}\partial_\mu A_\mu(n)+\tfrac{iga^2}{2}\partial_\nu A_\nu(n)+iga^2\partial_\mu A_\nu(n)\right)-\tfrac{g^2a^2}{2}[A_\mu(n),A_\nu(n)]+O(a^3)\right]
$$
$$
U^\dagger_{n+\hat\nu,\hat\mu}U^\dagger_{n,\hat\nu} = \exp\left[-iga(A_\mu(n)+A_\nu(n))-iga^2\partial_\nu A_\mu(n)-\tfrac{iga^2}{2}\partial_\mu A_\mu(n)-\tfrac{iga^2}{2}\partial_\nu A_\nu(n)-\tfrac{a^2g^2}{2}[A_\mu(n),A_\nu(n)]+O(a^3)\right].
$$
であるから
$$
\begin{aligned}
p_{\hat\mu\hat\nu}(n) &= \exp\left[iga^2(\partial_\mu A_\nu(n)-\partial_\nu A_\mu(n))-g^2a^2[A_\mu(n),A_\nu(n)]+O(a^3)\right]\\
&= \exp\left[iga^2(\partial_\mu A_\nu(n)-\partial_\nu A_\mu(n)+ig[A_\mu(n),A_\nu(n)]+O(a^3)\right]\\
&= \exp\left[iga^2F_{\mu\nu}\right] \quad (\text{as } a\to 0)\\
&= 1+iga^2F_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g^2a^4(F_{\mu\nu})^2+O(a^6)
\end{aligned}
$$

故に $P_{\hat\mu\hat\nu}(n) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(1-\frac{1}{2}g^2a^4(F_{\mu\nu})^2\right). = 1-\frac{1}{2N}g^2a^4\,\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}^2\right].$ であるから $-\int d^4x\,\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}^2) = \frac{N}{g^2}\int\left(1-P_{\hat\mu\hat\nu}(n)\right)d^4x.$

従って $S_W = \frac{\beta}{2}\sum_n\sum_{1\le\mu\neq\nu\le 4}\left(1-P_{\mu\nu}(n)\right) = \beta\sum_\square\left(1-P_\square(n)\right)$: <u>Wilson 作用</u>. $\left(\underset{\text{結合定数}}{\beta}=\frac{2N}{g^2}\right)$. ■

Wilson 作用を用いた経路積分の表式は

$Z = \int\prod_{n,\mu}dU_{n,\mu}\,\exp(S_W)$ である. 連続理論の場合とは異なり, 積分する自由度がリンク関数 ($\in SU(N)$) であるため $\int\prod_\ell dU_\ell = \mathbb{I}$ と規格化されている. (→ 格子ゲージ理論では gauge 固定する必要がない) リンク変数に対する経路積分の測度は Haar 測度の存在性定理により (不変) Haar 測度に取れる. この場合 Z は gauge 不変であるから, gauge 不変でない局所的な演算子の期待値は常にゼロ, 言いかえると「格子 gauge 理論では局所 gauge 対称性は自発的に破れない」 → Elitzur の定理.

(Mermin-Wagner の定理と関連)

3. Fermion 場の格子化.

- gauge 場と相互作用している Fermion の作用は $S = \int d^4x\,\bar\psi(x)\left[\gamma_\mu(\partial_\mu+igA_\mu)+m\right]\psi(x).$

これを格子化すると, $S_{\text{lattice}} = a^4\sum_n\bar\psi(n)\left[\sum_\mu\gamma_\mu\frac{U_{n,\mu}\psi(n+\hat\mu)-U^\dagger_{n-\hat\mu,\mu}\psi(n-\hat\mu)}{2a}+m\psi(n)\right].$

無次元化された場 $\psi_L(x) := a^{-\frac{3}{2}}\psi(x)$, 及び質量 $M := am$ を導入すると

$$
S_{\text{lattice}} = \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\left[\bar\psi_L(n)\gamma_\mu U_{n,\mu}\psi_L(n+\hat\mu)-\bar\psi_L(n+\hat\mu)\gamma_\mu U^\dagger_{n,\mu}\psi_L(n)\right]+M\sum_n\bar\psi_L(n)\psi_L(n)
$$

となる.

自由場の場合 $U=\mathbb{I}$ であるから $S^{(F)}_{\text{lattice}} = \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\left[\bar\psi_L(n)\gamma_\mu\psi_L(n+\hat\mu)-\bar\psi_L(n+\hat\mu)\gamma_\mu\psi_L(n)\right]+M\sum_n\bar\psi_L(n)\psi_L(n).$

これを運動量表示して $S^{(F)}_{\text{latt}} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\bar\psi_L(-p)\left[i\gamma_\mu\sin p_\mu a+M\right]\psi_L(p). \quad \cdots (1)$

復習　作用(1)から導出される伝播関数 $G(p)$ は

$$G_F(p) = \frac{-i\sum_\mu \gamma_\mu \sin p_\mu a + M}{\sum_\mu \sin^2 p_\mu a + M^2}.$$

pr.of. 生成母関数は $\eta(p), \bar{\eta}(p)$ をG-数ソース関数として

$$Z[\bar{\eta},\eta] = \int \mathcal{D}\psi_L \mathcal{D}\bar{\psi}_L \exp\left[-\int d^4p \left(\bar{\psi}_L(-p)[i\gamma_\mu \sin p_\mu a + M]\psi_L(p) + \bar{\eta}(p)\psi_L(p) + \eta(p)\bar{\psi}_L(p)\right)\right].$$

である.

補題. G-数 $\xi_i\ (i=1,\dots,n)$ に対し

$$(2):\quad \int \exp\left[-\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i^\dagger M_{ij}\xi_j - \sum_{i=1}^{n}(\xi_i^\dagger\eta_i + \eta_i^\dagger\xi_i)\right] d^n\xi\, d^n\xi^\dagger = (\det M_{ij}) \exp\left[\sum_{i,j=1}^{n}\eta_i^\dagger (M^{-1})_{ij}\eta_j\right].$$

pr.of. $\xi^\dagger M\xi + \xi^\dagger\cdot\eta + \eta^\dagger\cdot\xi = (\xi^\dagger + \eta^\dagger(M)^{-1})M(\xi + (M^{-1})\eta) - \eta^\dagger(M)^{-1}\eta$ であるから

$\xi' := \xi + (M)^{-1}\eta,\ \xi'^\dagger := \xi^\dagger + \eta^\dagger(M)^{-1}$ と置きかえると $d^n\xi d^n\xi^\dagger = d^n\xi' d^n\xi'^\dagger$ より

$$(2) = \exp[\eta^\dagger(M)^{-1}\eta]\int \exp[-\xi' M\xi']\, d^n\xi' d^n\xi'^\dagger \underset{(G\text{-Gauss})}{=} (\det M_{ij})\exp\sum_{i,j}\eta_i^\dagger (M^{-1})_{ij}\eta_j$$

(2)で $M \mapsto i\gamma_\mu \sin p_\mu a + M$ とすれば

$$Z[\bar{\eta},\eta] = \mathrm{Det}(i\gamma_\mu \sin p_\mu a + M)\exp\left[\int d^4p\, d^4q\, \bar{\eta}(p) S(p-q)\eta(q)\right],\quad S(p) = G_F(p) = \frac{1}{i\gamma_\mu \sin p_\mu a + M} = \frac{-i\sum_\mu \gamma_\mu \sin p_\mu a + M}{\sum_\mu \sin^2 p_\mu a + M^2}$$

例えば $M=0$ の場合を考えると, $G_F(p)$ の分母が0, 従って $p_\mu = 0, \frac{\pi}{a}$ のとき伝播関数の極, 即ち粒子に対応しているので

$D=4$ 次元空間の場合 粒子は $2^D = 16$ 個現れてしまう…. (Fermion・Doubler)

粒子の個数は系のダイナミクスに大きな影響を与えるので, 伝播関数の余分な極を消去し, 1つの粒子を表すようにしたい.

⟶ 解決方法の1つが, 格子上の作用へのWilson項の導入.

Wilson項: $-k\sum_n\sum_\mu \bar{\psi}(n)\dfrac{\psi(n+\hat{\mu}) + \psi(n-\hat{\mu}) - 2\psi(n)}{2a}$ は 連続極限で $-ka\int d^4x\, \bar{\psi}(x)\partial^2\psi(x) \to 0.$

となるから Wilson項は連続理論のフェルミオン作用に無寄与. Wilson項を加えた後の作用は

$$S^{(W)}_{\text{lattice}} = a^4\sum_n \bar{\psi}(n)\left[\sum_\mu \gamma_\mu \frac{\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n-\hat{\mu})}{2a} - k\sum_\mu \frac{\psi(n+\hat{\mu}) + \psi(n-\hat{\mu}) - 2\psi(n)}{2a} + m\psi(n)\right]$$

この作用から導出される伝播関数は

$$G^{(W)}(p) = \frac{1}{i\sum_\mu \gamma_\mu \frac{1}{a}\sin(p_\mu a) + \frac{k}{a}\sum_\mu(1-\cos(p_\mu a)) + \frac{M}{a}} = \frac{-i\sum_\mu \gamma_\mu \sin(p_\mu a) + (M + k\sum_\mu(1-\cos(p_\mu a)))}{\underbrace{\sum_\mu \sin^2 p_\mu a}_{①} + (M + \underbrace{k\sum_\mu(1-\cos(p_\mu a))}_{②})^2}\, a$$

再び $M=0$ の場合を考えると $p_\mu = \frac{\pi}{a}$ では ② のために極が現れず, 全ての成分について $p_\mu = 0$ の場合のみが極に対応し,

故に粒子は1つしか現れない.

ところが Wilson項は カイラル対称性を陽に破る. ⟶ ニールセン=二宮の定理 の主張の一部.

ニールセン=二宮の定理

格子フェルミオンの作用が以下の全ての仮定を満たすとき, フェルミオン・ダブリングが必ず生じる:

1. 格子上の並進対称性. 2. カイラル対称性 3. エルミート性 4. フェルミオン場の双一次形式 5. 相互作用の局所性.

ex. Wilson・フェルミオンは ナイーブな作用に カイラル対称性を破る項を追加することで ダブリングを回避している.

pr.of. ??? (Poincaré–Hopf の定理を使うらしい.)

・格子作用のまとめ．

格子上のグルーオン場とクォーク場の作用として

$$S_G = -\frac{N}{g^2}\sum_n \sum_{\mu\neq\nu} P_{\mu\nu}(n)$$

$$S_F = -k\sum_n \sum_\nu \bar{\Psi}_q(n)\left[(k-\gamma_\mu)U_{n,\mu}\Psi_q(n+\hat{\nu}) + (k+\gamma_\mu)U^{\dagger}_{n-\mu,\mu}\Psi_q(n-\hat{\mu})\right] + \sum_n \bar{\Psi}_q(n)\Psi_q(n)$$

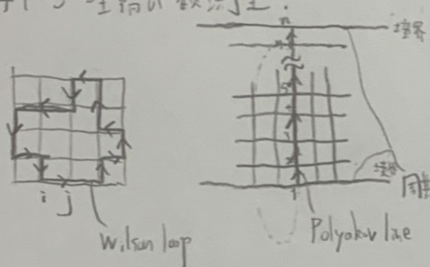
を得た．但し $k := \frac{1}{2}\frac{1}{ma+4k}$ ，$\Psi_q := \sqrt{\frac{a^3}{2k}}\Psi$

クォーク場の作用は $S_F = \sum_{x,y}\sum_{j,k}\sum_{a,b}\bar{\Psi}^a_{xj} D(x,y)^{ab}_{jk}\Psi(y)^b_k$ ，$D(x,y)^{ab}_{jk} = \delta_{xy}\delta_{jk}\delta_{ab} - k\sum_\mu\left[(k-\gamma_\mu)_{jk}U^{ab}_{n,\mu}\delta_{x+\hat{\mu},y} + (k-\gamma_\mu)_{jk}U^{\dagger ab}_{n-\hat{\mu},\mu}\delta_{x-\hat{\mu},y}\right]$

と書き直せる．$(D(x,y)^{ab}_{jk})^{-1}$ がクォークの伝播関数に対応する．

注． ファイバー束の言葉では，QCDは底空間Bは4次元Euclid空間，ゲージ群はSU(3)の主束になり，接続も自然に導入される．
一方，格子QCDは離散化された格子を時空間にとるが，群は連続のままにとるのでファイバー空間は離散化されていない．
格子上の各点にgauge自由度を付与するのは主束のファイバーGを与えている状況と同等であり，リンク変数Uは隣り合う
gauge変換をまさに「接続」している．

4， 格子ゲージ理論の観測量．



$$W = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(U_{ij}U_{jk}\cdots U_{li}) \\ L = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(U_{1,2}U_{2,3}\cdots U_{n-1,n})$$
これらはgauge不変であった．

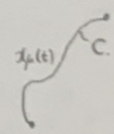
gaugeの観測量はgauge不変，即ち閉じたループの関数に限られる．

$\longrightarrow$ Wilson loop or Polyakov loop．

gauge場と結合するような外部ソースを手で導入する： $j_\mu = g\delta^3(x_\mu - x_\mu(t))$ ．これが A_μ と $i\int d^4x j_\mu A_\mu = ig\int_C dx_\mu A_\mu$ で
相互作用しているとする． gauge場の作用にこの相互作用項を付け加えると $e^{-S_G} \mapsto e^{ig\int_C A_\mu dx_\mu}e^{-S_G}$ となる．

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} e^{igaA_{m+1-k}}\right)e^{-S_G}$$

$$= We^{-S_G}. \quad \text{or} \quad Le^{-S_G}.$$



外場を入れた場合の自由エネルギー変化は， $F = -\log Z = -\log\left(\int dU e^{-S_G}\right)$ に注意して

$$e^{-\Delta F} = \frac{e^{-(F+\Delta F)}}{e^{-F}} = \frac{\int dU e^{-S_G}W}{Z} = \langle W\rangle \qquad \text{i.e.} \quad \Delta F = -\log\langle W\rangle$$

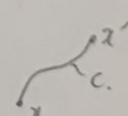
$\rightarrow$ Wilson loop の期待値の物理的意味は，無限に質量の大きいクォークがloop上を走ったときのエネルギーの増分である．
Polyakov loop の場合は loop $\rightarrow$ line．

粒子がCを走る前後で $\Delta F \to \infty$ となった場合， $\langle W\rangle = 0$ i.e. $\langle S_W\rangle = 0$ であるからこの粒子は単独では存在し得ない．…(*)．

5， 面積則の導出．

QCDに閉じ込めがあるか否かは， $x = (t, 0)$ にクォークが，そして $x = (t, R)$ に反クォークがある系のエネルギーに着目すれば良い．
（閉じ込めなしの場合， $E(R) \to 2m$ for $R \to \infty$ ，閉じ込めありの場合 $E(R) \to \infty$ for $R \to \infty$ ．）
時刻tでの $q\bar{q}$ 状態は次のように表現可能であった：（Elitzurの定理の帰結）

$$|q(t,0)\bar{q}(t,R)\rangle = \sum_C f(C)\,\Gamma[(t,R),(t,0);C]\,|0\rangle.$$



但し $\Gamma[x', x; C]$ はgauge不変な $q\bar{q}$ オペレーターであり， $\Gamma[x', x, C] = \bar{q}(x')U(x', x, C)q(x)$ ．
$\left(U(x', x; C) := \exp\left\{ig\int_{x\,(C)}^{x'} A(y)dy\right\}.\right)$

ここで $\Omega(T,R) := \langle 0|\Gamma^\dagger[(0,0),(0,R);C]\,\Gamma[(T,0),(T,R);C]|0\rangle$

とすると エネルギー固有状態の完全系を挿入して， $\Omega(T,R) = \sum_n \left|\langle 0|\Gamma^\dagger[(0,0),(0,R);C]|n\rangle\right|^2 e^{-E_nT}$ ．を得る．

$T \to \infty$ で $E(R) := \min_n E_n$ が支配的になり，$E(R)$ は距離Rだけ離れた $q\bar{q}$ 系のポテンシャルエネルギーに一致するのでこれを新たに
$V(R)$ と書き直すと，

$$\lim_{T\to\infty}\Omega(T,R) \propto e^{-TV(R)}. \quad \cdots(i)$$

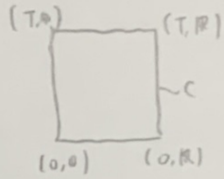
一方　$\Omega(T,R) = \langle 0|\bar{q}(0,R)\,U[(0,R),(0,0);C]\,q(0,0)\,\bar{q}(T,0)\,U[(T,0),(T,R);C]\,q(T,R)|0\rangle$ …(ii) であり、

また　$\langle 0|q^{\beta}(t',x)\bar{q}^{\alpha}(t,x)|0\rangle = \exp\left[i\int_t^{t'} A_0(\tau,x)\,d\tau\right]\langle 0|q^{\beta}(t,x)\bar{q}^{\alpha}(t,x)|0\rangle_{\text{free}}\, e^{-m|t'-t|}$

$$\propto U[(t',x),(t,x);C]\, e^{-m|t'-t|}\cdot \left.\frac{1}{\delta_{xy}\delta_{jk}\delta_{\alpha\beta} - k\sum_{\mu}\left[(k-r_{\mu})_{jk}U^{\alpha\beta}_{n,\mu}\delta_{x+\hat{\mu},y} + (k-r_{\mu})_{jk}U^{\dagger\,\alpha\beta}_{n-\hat{\mu},\mu}\delta_{x-\hat{\mu},y}\right]}\right|_{\substack{x=y\\ j=k\\ U=1}}$$

$$= U[(t',x),(t,x);C]\,\delta^{\alpha\beta} e^{-m|t'-t|} \quad \text{…(iii)}$$

(ii), (iii) より　$\Omega(T,R) \propto e^{-2mT}\underbrace{\langle 0|\mathrm{Tr}\,U[x,x;C]|0\rangle}_{=\langle W[C]\rangle}$ …(iv)　但し経路 C は



である。

(ii), (iv) より　$\lim_{T\to\infty}\langle W(C)\rangle \propto e^{-T[V(R)-2m]} \propto e^{-TV(R)}$ …(v). → (7.35)

ここで次を示す：

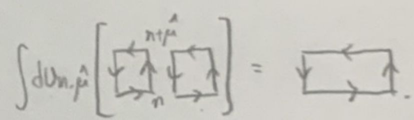
強結合極限では　$\langle W(C)\rangle \propto (g^2)^{-\frac{A(C)}{a^2}}$.　（但し A(C) は閉曲線 C により囲まれる図形の面積.）

proof

$$\langle W(C)\rangle = \frac{1}{Z}\int\prod_{n,\mu} dU_{n,\hat{\mu}}\,\mathrm{Tr}\,U(x,x;C)\exp\left[-\frac{2}{g^2}\sum_{\Box}\mathrm{Tr}\,\Box\right] \quad \text{due } Z = \int\prod_{n,\mu} dU_{n,\hat{\mu}}\exp\left[\frac{2}{g^2}\sum_{\Box}\mathrm{Tr}\,\Box\right]$$

ここで　$\int dU_{n,\hat{\mu}}[U_{n,\hat{\mu}}]_{ij} = 0,\quad \int dU_{n,\hat{\mu}}[U_{n,\hat{\mu}}]_{ij}[U^{\dagger}_{n,\hat{\mu}}]_{kl} = \frac{1}{3}\delta_{il}\delta_{jk},\quad \int dU_{n,\hat{\mu}}[U_{n,\hat{\mu}}]_{ij}[U_{n,\hat{\mu}}]_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{jl}$

より　$g\to\infty$ の極限では



$$\langle W(C)\rangle = \frac{1}{Z}\int dU_{n\hat{\mu}}\,\mathrm{Tr}\,U(x,x;C)\left[1 - \frac{2}{g^2}\sum_{\Box}\mathrm{Tr}\,\Box + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{g^2}\right)^2\sum_{\Box}\sum_{\Box'}\mathrm{Tr}\,\Box\,\mathrm{Tr}\,\Box' + O\left(\frac{1}{g^6}\right)\right]$$

より　$\langle W(\Box)\rangle \propto \frac{1}{Z}\int dU_{n,\hat{\mu}}\,\mathrm{Tr}\,U(x,x;\Box)\left(-\frac{1}{g^2}\right)\sum_{\Box}\mathrm{Tr}\,\Box$　(as $g\to\infty$)

(Wilson-loop)

$$\propto \left(\frac{1}{g^2}\right)^{N_p}$$

（N_p：経路 C により囲まれる図形を被覆するプラケットの最小数）

$$= \left(\frac{1}{g^2}\right)^{\frac{A(\Box)}{a^2}}$$

これより　$\langle W(C)\rangle = \prod_{N_p}\langle W(\Box)\rangle \propto \prod_{N_p}(g^2)^{-\frac{A(\Box)}{a^2}} = (g^2)^{-\frac{1}{a^2}\sum_{N_p}A(\Box)} = (g^2)^{-\frac{A(C)}{a^2}}$.　→ 面積則 (7.34)

従って強結合領域では　$\langle W(C)\rangle \propto \exp\left(-\frac{TR}{a^2}\log g^2\right)$. …(vi) → (7.36)　但し C は Wilson-loop にとった。

(v), (vi) より　$E(R) := V(r) - 2m \propto R. \to \infty$ $(R\to\infty,\ g\to\infty)$ であるからクォークは単独では取り出せない。

（クォークの閉じ込め）