7.5.

$$\begin{cases} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \\ \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ \gamma^{i\dagger} = \gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i \quad (i \geq 1) \\ \gamma_0 = \gamma_0^\dagger = (\gamma_0)^{-1},\ \gamma^5 = (\gamma^5)^\dagger = (\gamma^5)^{-1}. \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \\ \gamma^5 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu. \end{cases}$$

Dirac-Pauli 表現：

$$\begin{cases} \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

カイラル変換： $\psi \mapsto e^{i\gamma^5\theta}\psi$, $\psi^\dagger \mapsto \psi^\dagger e^{-i\gamma^5\theta}$

大域的位相変換： $\begin{cases} \psi_R \mapsto e^{i\theta_R}\psi_R, \\ \psi_L \mapsto e^{i\theta_L}\psi_L. \end{cases}$

非可換ゲージ場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\psi, \qquad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu,\quad D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu T^a$$ である。

Dirac 場の部分はより詳細にかくと $\underbrace{\sum_{f=1}^{6}}_{\text{フレーバー}}\underbrace{\sum_{i,j=1}^{3}}_{\text{カラー}} \bar{\psi}^f_i\left(i\gamma^\mu\left(\delta_{ij}\partial_\mu - igA^a_\mu(T^a)_{ij}\right) - m_f\right)\psi^f_j$ である。 $\begin{pmatrix} f = u, d, s, c, b, t. \\ i, j = R, G, B. \end{pmatrix}$

$u \simeq 4\,\mathrm{MeV}$, $d \simeq 8\,\mathrm{MeV}$, $s \simeq 150\,\mathrm{MeV}$, $c \simeq 1.2\,\mathrm{GeV}$, $b \simeq 4.2\,\mathrm{GeV}$, $t \simeq 170\,\mathrm{GeV}$. （カレント代数からの推測）（後述）

復習 • ψ: Spinor のとき $\bar{\psi}i\gamma_5\psi$ は実擬スカラー， $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ は実軸性ベクトル

prof. $(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma_5(-i)\gamma_0\psi = \bar{\psi}i\gamma_5\psi$, $(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma_5\gamma_0\gamma_\mu\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ → ともに実

また， $\psi'(x') = S\psi(x)$, $S = \exp[-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}]$, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ より $[\gamma_5, S] = [\gamma_5, S^{-1}] = 0$, $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ より

$\bar{\psi}'(x')i\gamma_5\psi'(x') = \psi^\dagger(x)S^{-1}\gamma_0 i\gamma_5 S\psi(x) = \bar{\psi}i\gamma_5\psi(x)$ → スカラー変換, $\bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\gamma_5\psi'(x') = \psi^\dagger S^{-1}\gamma_0\gamma_\mu\gamma_5 S\psi(x) = \Lambda_\mu{}^\nu\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\gamma_5\psi(x)$. → ベクトル変換

さらに， P を P変換の演算子として $P\psi(t,x)P^{-1} = P\psi(t,-x)$ $P = \gamma^0$, $P\gamma_5 P^{-1} = -\gamma_5$, $P^{-1}\gamma^\mu P = \gamma_\mu$ より

$P\bar{\psi}(t,x)i\gamma_5\psi(t,x)P^{-1} = (P\psi(t,x)P^{-1})^\dagger\gamma_0 P i\gamma_5 P^{-1}P\psi(t,x)P^{-1} = i\psi^\dagger(t,-x)P\gamma_5 P^{-1}P\psi(t,-x) = -\bar{\psi}(t,-x)i\gamma_5\psi(t,-x)$

$P\bar{\psi}(t,x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(t,x)P^{-1} = (P\psi(t,x)P^{-1})^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\gamma_5 P\psi(t,x)P^{-1} = \bar{\psi}(t,-x)P\gamma_\mu P^{-1}P\gamma_5 P^{-1}P\psi(t,-x)$ → 擬

$= -\bar{\psi}(t,-x)i\gamma^\mu\gamma_5\psi(t,-x)$ → 軸性.

• （南部－ゴールドストーン定理）

系のラグランジアン $\mathcal{L}$ が大域的連続対称性を持ち，基底状態で対称性が自発的に破れている場合，質量0のスカラーボソンが現れる。

prof. Noether の定理よりこの場合保存カレント $J^\mu_{(x,t)}$ を持ち，またチャージ $Q(t) := \int d^3x J_0(x,t)$ が定義される。

場の演算子を $\phi(x)$ で書くと変換則は $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\varepsilon Q}\phi(x)e^{-i\varepsilon Q} = \phi(x) + i\varepsilon[Q, \phi(x)] + \cdots$ である。

$0 = \int d^3x\,[\partial^\mu J_\mu(x,t), \phi(0)] \overset{(\text{Gauss})}{=} \partial^0\int d^3x\,[J_0(x,t), \phi(0)] + \underbrace{\int dS\cdot[J(x,t), \phi(0)]}_{0}$ より $\partial_t[Q(t), \phi(0)] = 0$.

$\langle 0|[Q(t), \phi(0)]|0\rangle = \eta \neq 0$ のとき対称性が自発的に破れるという。これに中間状態の完全系を挿入し，平行移動演算子を使えば

$$\sum_n (2\pi)^3\delta^3(p_n)\left\{\langle 0|J_0(0)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle e^{-iE_nt} - \langle 0|\phi(0)|n\rangle\langle n|J_0(0)|0\rangle e^{iE_nt}\right\} = \eta.$$

従って ある n' があって $p_{n'} = 0$ であり，このとき $E_{n'} = 0$ 。故にこれは質量のない状態（ゴールドストーンボソン）であり，

この粒子は $\langle n'|\phi(0)|0\rangle \neq 0$, $\langle 0|J_0(0)|n'\rangle \neq 0$ を満たす。従って $|n'\rangle$ は カレント $J_0(0)$ ，あるいは演算子 $\phi(0)$ で真空に接続される。

$$\left(\begin{cases} U_A(1) \text{ 変換：} \psi \mapsto e^{i\gamma^5\alpha}\psi \\ U_V(1) \text{ 変換：} \psi \mapsto e^{i\beta}\psi. \end{cases}\right.$$

合わせて $U(1)$ 変換： $\psi_{R,L} \mapsto e^{i\theta_{RL}}\psi_{R,L}$

$$\left(\begin{cases} SU_A(2) \text{ 変換：} \psi \mapsto e^{i\gamma^5\theta^a\tau^a}\psi, \\ SU_V(2) \text{ 変換：} \psi \mapsto e^{i\varphi^a\tau^a}\psi. \end{cases}\right.$$

合わせて $SU(2)$ 変換， $\psi_{R,L} \mapsto e^{i\varphi^a_{RL}\tau^a}\psi_{R,L}$.

（例えば $\psi \mapsto e^{i\theta_R}\psi_R + e^{i\theta_L'}\psi_L$ とおくと

・$\theta_R = \theta_L$ で $\psi \mapsto e^{i\theta}\psi$ → $U_V(1)$

・$\theta_R = -\theta_L$ で $\psi \mapsto \left(e^{i\theta}\frac{1-\gamma_5}{2} + e^{-i\theta}\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi$

$= e^{i\gamma^5\theta}\psi$ → $U_A(1)$. ）

これらの変換の性質.

1. $\mathcal{L} = \underbrace{\bar\psi(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi}_{\text{カイラル不変}} + \underbrace{m\bar\psi\psi}_{\text{不変でない}}$. → $\mathcal{L}$がカイラル対称なら $m=0$. (逆も然り)

prf. $i\bar\psi\gamma_\mu\partial^\mu\psi \Rightarrow i\psi^\dagger e^{-i\gamma_5\theta}\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu e^{i\gamma_5\theta}\psi = i\psi^\dagger e^{-i\gamma_5\theta}e^{i\gamma_5\theta}\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu\psi = i\bar\psi\gamma_\mu\partial^\mu\psi$.　　$SU_A(2)$の場合も同様.

$m\bar\psi\psi \Rightarrow m\psi^\dagger e^{-i\gamma_5\theta}\gamma_0 e^{i\gamma_5\theta}\psi = m\psi^\dagger\gamma_0 e^{i\gamma_5\theta}e^{i\gamma_5\theta}\psi = m\bar\psi e^{2i\gamma_5\theta}\psi$. ∎

2. カイラル変換は擬スカラーとスカラーを入れ替える.

prf. 擬スカラー $i\bar\psi\gamma_5\psi$ をカイラル変換すると, ($U_A(1)$ 変換)

$$i\bar\psi\gamma_5\psi \Rightarrow i\psi^\dagger e^{-i\gamma_5\theta}\gamma_0\gamma_5 e^{i\gamma_5\theta}\psi = i\psi^\dagger(\cos\theta - i\gamma^5\sin\theta)\gamma_0\gamma_5(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)\psi$$
$$= i\bar\psi(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)\gamma_5(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)\psi$$
$$= i\bar\psi(\gamma_5\cos2\theta + i\sin2\theta)\psi.$$

故に $\theta = \frac{\pi}{4}$ とすれば $i\bar\psi\gamma_5\psi \Rightarrow -\bar\psi\psi \Rightarrow -i\bar\psi\gamma_5\psi$.

$SU_A(2)$ の場合, $\hat\theta^i := \frac{\theta^i}{|\theta|}$ とおくと

$$e^{i\gamma_5\tau^i\theta^i} = 1 + i\gamma_5\hat\theta^i\tau^i|\theta| - (\hat\theta^i\tau^i)^2\frac{|\theta|^2}{2} - \cdots = 1 + i\gamma_5\hat\theta^i\tau^i|\theta| - \frac{|\theta|^2}{2} - \cdots = \cos|\theta| + i\gamma_5\hat\theta^i\tau^i\sin|\theta|.$$

従って $i\bar\psi\gamma^5\tau^k\psi \Rightarrow i\psi^\dagger e^{-i\gamma^5\tau^a\hat\theta^a|\theta|}\gamma_0\gamma^5\tau^k e^{i\gamma^5\tau^b\hat\theta^b|\theta|}\psi = i\psi^\dagger(\cos|\theta| - i\gamma^5\tau^a\hat\theta^a\sin|\theta|)\gamma_0\gamma^5\tau^k(\cos|\theta| + i\gamma^5\tau^b\hat\theta^b\sin|\theta|)\psi$

$= \cdots = i\bar\psi\gamma^5\tau^k\psi - i(\bar\psi\gamma^5\tau^a\hat\theta^a\psi)\hat\theta^k(1-\cos\theta) - \bar\psi\psi\hat\theta^k\sin\theta$.

$k=1$ とし, $\theta^1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta^2 = \theta^3 = 0$ とすれば $i\bar\psi\gamma^5\tau^1\psi \Rightarrow i\bar\psi\gamma^5\tau^1\psi - i\bar\psi\gamma^5\tau^1\psi - \bar\psi\psi = -\bar\psi\psi$. ($\Rightarrow -i\bar\psi\gamma^5\tau^1\psi$) ∎

3.1. 2-flavor QCDモデル (比較的質量の軽い u, d クォーク) のラグランジアン $\mathcal{L}_{QCD}$ を $\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_1 - (m_u\bar u u + m_d\bar d d)$ と分離して書いたとき, $\mathcal{L}_1$ は $U_{A,V}(1)$, $SU_{A,V}(2)$ 不変.

prf. 1. の結果を使えば, また $U_V(1)$, $SU_V(2)$ 不変性は明らかなので ok. ∎

3.2. $\mathcal{L}_1$ の $SU_A(2), SU_V(2), U_{V,A}(1)$ 変換に対する Noether カレントは

$SU_A(2)$: $j^a_{5\mu} = \bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\tau^a\psi$, $SU_V(2)$: $j^a_\mu = \bar\psi\gamma_\mu\tau^a\psi$, $U_V(1)$: $j_\mu = \bar\psi\gamma_\mu\psi$. $U_A(1)$: $j_{5\mu} = \bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi$.

prf. $J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - \delta x_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)$ に $\delta x_\nu = 0$, $\delta\phi = \left\{\begin{array}{l}\vdots\end{array}\right.$ を代入すれば ok. ∎

注. 実はカレント $j_{5\mu}$ は保存しない: $\partial^\mu j_{5\mu} = \underbrace{-\frac{g^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}}$.
($j^a_{5\mu}, j^a_\mu, j_\mu$ は保存する.)　　経路積分の測度がカイラル不変でないことによる. 量子異常 または (藤川) アノマリー と呼ばれる.

• カイラル対称性 と PCAC仮説

2. の結果から カイラル不変な理論では同じ質量を持った擬スカラー粒子とスカラー粒子が必ず存在しなければならない. 一方擬スカラーとスカラーは P 変換で区別されるので, パリティ2重項を組む. ところが擬スカラー X_1 と スカラー X_2 で X_1 と X_2 の質量が同程度の組は未だ観測されていない. 擬ベクトル粒子とベクトル粒子でも同様である. → カイラル対称でない可能性が高い.
いま, カイラル対称でないと仮定する.

$j^a_{5\mu} = \bar\psi(x)\gamma_\mu\gamma_5 T^i\psi(x)$ $(i=1,2,3)$ のチャージは $Q^i_5 = \int d^3x\,\bar\psi(x)\gamma_0\gamma_5 T^i\psi(x)$. 真空は上の仮定からカイラル不変ではないので,

$Q^i_5|0\rangle = |n\rangle \neq |0\rangle$. (→ Q^i_5 は真空で粒子生成可能). これより $\langle 0|\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5 T^i\psi(x)|n\rangle \neq 0$. Fourier変換して運動量表示にするなら $\langle 0|\bar\psi(p')\gamma_\mu\gamma_5 T^i\psi(p)|n\rangle \neq 0$.

いま, $H|n\rangle = HQ_5|0\rangle = Q_5H|0\rangle = 0$, であり, また $[P, j^a_{50}] = i\nabla j^a_{50}$ より

$$P|n\rangle = PQ_5|0\rangle = Q_5P|0\rangle + i\underbrace{\int d^3x\,\nabla j^a_{50}(x)|0\rangle}_{0} = Q_5P|0\rangle = 0.$$

故に $|n\rangle$ は エネルギー, 及び 3次元運動量が 0 になっている. → 質量も0. また $|n\rangle = Q^i_5|0\rangle$ より 擬スカラー. 観測されている素粒子で この2つの条件を満たすものとして最も適当なものは パイオン π^i.

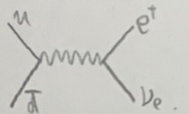
真空ではカイラル対称性が破れていて、ハミルトニアンではカイラル対称性は破られていないとしているので、カイラル対称性が真空で自発的に破れていると考えられる。→ π^i は Goldstone ボソンに対応させられる。(Goldstone の定理)

$$\langle 0|\bar\psi(p')q^\mu\gamma_\mu\gamma_5 T^i\psi(p)|\pi^j\rangle = \langle 0|\bar\psi(p')(p'_\mu\gamma^\mu - p_\mu\gamma^\mu)\gamma_5 T^i\psi(p)|\pi^j\rangle = \langle 0|\bar\psi(p')(m\gamma^\mu+\gamma_5 p_\mu\gamma^\mu)\gamma_5 T^i\psi(p)|\pi^j\rangle$$
$$= 2m\langle 0|\bar\psi(p')\gamma_5 T^i\psi(p)|\pi^j\rangle$$
$$= -2im\langle 0|\bar\psi(p')i\gamma_5 T^i\psi(p)|\pi^j\rangle$$
$$\propto \delta^{ij}.$$

位置表示に直して

$$q^\mu\langle 0|\bar\psi(p')\gamma_\mu\gamma_5 T^i\psi(p)|\pi^j\rangle \propto \delta^{ij} \Rightarrow \partial^\mu\langle 0|\bar\psi(x)\gamma_\mu\gamma_5 T^i\psi(x)|\pi^j\rangle \propto \delta^{ij}.$$

$\langle 0|\sim|\pi^j\rangle$ 部分はパイオンから真空への遷移なので



の不変振幅散乱 $\mathcal{M}$ と一致するので $\boxed{\langle 0|\partial^\mu j^i_{5\mu}(x)|\pi^j\rangle = -f_\pi m_\pi^2\delta^{ij}}$ (f_π:パイオンの崩壊定数)。

この関係を PCAC (partially conserved axial vector current) 仮説という。特に、ϕ^a をパイオン場の演算子とすれば $\langle 0|\phi^a(0)|\pi^b\rangle=\delta^{ab}$ より (規格化)

$$\partial^\mu j^i_{5\mu} = -f_\pi m_\pi^2\phi^i. \quad (i=1,2,3). \quad \cdots(*)'$$

一方 パイオン場の伝播関数は $\langle 0|T(\phi^a(0)\phi^b(k))|0\rangle = -\frac{i\delta^{ab}}{m_b^2-k^2}$ より Fourier 変換して

$$-\frac{i\delta^{ab}}{m^2-k^2} = \int d^4x\, e^{-ik\cdot x}\langle 0|T(\phi^a(0)\phi^b(x))|0\rangle$$
$$= \frac{1}{f_a m_a^2 f_b m_b^2}\int d^4x\, e^{-ik\cdot x}\langle 0|T(\partial^\mu j^a_{5\mu}(0)\partial^\nu j^b_{5\nu}(x))|0\rangle \quad (\because (*)')$$

i.e.
$$\delta^{ab}m_a^2 f_a = \frac{i(m_b^2-k^2)}{f_b m_b^2}\int d^4x\, e^{-ik\cdot x}\langle 0|T(\partial^\mu j^a_{5\mu}(0)\partial^\nu j^b_{5\nu}(x))|0\rangle$$
$$= \frac{i(m_b^2-k^2)}{f_b m_b^2}\left[ik_\nu\int d^4x\,\langle 0|T(\partial^\mu A^a_\mu(0)A^b_\nu(x))|0\rangle e^{-ik\cdot x} - \int d^4x\, e^{-ik\cdot x}\langle 0|\delta(x_0)[A^b_0(x),\partial^\mu A^a_\mu(0)]|0\rangle\right]$$

従って低エネルギー極限では、

$$\delta_{ab}m_a^2 f_a^2 = i\int d^4x\,\langle 0|\delta(x_0)[A^b_0(x),\partial^\mu A^a_\mu(0)]|0\rangle = \langle 0|[Q_5^a,[Q_5^b,\mathcal{H}(0)]]|0\rangle. \quad \cdots(*)''$$

$(*)''$ より次を得る:

$$\begin{cases} f_\pi^2 m_\pi^2 = -\frac{m_u+m_d}{2}\langle 0|\bar uu+\bar dd|0\rangle & \cdots(i) \\ f_K^2 m_K^2 = -\frac{m_u+m_s}{2}\langle 0|\bar uu+\bar ss|0\rangle & \cdots(ii) \\ f_\eta^2 m_\eta^2 = -\frac{m_u+m_d}{6}\langle 0|\bar uu+\bar dd|0\rangle - \frac{4m_s}{3}\langle 0|\bar ss|0\rangle. & \cdots(iii) \end{cases}$$

proof. $\mathcal{H}' := m_u\bar uu + m_d\bar dd + m_s\bar ss$ とおく。このとき $\mathcal{H}'$ はクォーク場の質量項である。(3-flavor QCD で考えていることに注意。)

ここで $u_i := \bar q\lambda_i q$ $(i=0\sim 8)$, $\lambda_0=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbb{1}$, λ_i: Gell-Mann 行列 とすると

$$\begin{cases} C_0 := \frac{1}{\sqrt6}(m_u+m_d+m_s) \\ C_8 := \frac{1}{\sqrt3}\left(\frac{m_u+m_d}{2}-m_s\right) \\ C_3 := \frac{1}{3}(m_u-m_d) \end{cases}$$

として $\mathcal{H}' = C_0u_0 + C_3u_3 + C_8u_8$ と表せる。

同様に擬スカラー密度 v_i を $v_i := -i\bar q\lambda_i\gamma_5 q$ とする。

クォーク場の反交換関係 $\{q^\dagger_\alpha(x,t), q_\beta(y,t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(x-y)$, (他は0) を用いると、

$$[\bar q\tfrac{\lambda^a}{2}\gamma_0\gamma_5 q, \bar q\lambda^b q] = \frac12[q^\dagger_\alpha q_\beta, q^\dagger_\gamma q_\delta](\lambda^a\gamma_5)_{\alpha\beta}(\lambda^b\gamma^0)_{\gamma\delta}$$
$$=\frac12\left(q^\dagger_\alpha[q_\beta,q^\dagger_\gamma q_\delta] + [q^\dagger_\alpha, q^\dagger_\gamma q_\delta]q_\beta\right)(\lambda^a\gamma_5)_{\alpha\beta}(\lambda^b\gamma^0)_{\gamma\delta}$$
$$=\frac12\left(-q^\dagger_\alpha q^\dagger_\gamma\{q_\beta,q_\delta\} + q^\dagger_\alpha\{q_\beta,q^\dagger_\gamma\}q_\delta - q^\dagger_\gamma\{q^\dagger_\alpha,q_\delta\}q_\beta + \{q^\dagger_\alpha,q^\dagger_\gamma\}q_\beta q_\delta\right)(\lambda^a\gamma_5)_{\alpha\beta}(\lambda^b\gamma_0)_{\gamma\delta}$$
$$=\frac12 q^\dagger[\lambda^a\gamma_5,\lambda^b\gamma^0]q$$
$$=-\frac12\bar q\gamma_5\{\lambda^a,\lambda^b\}q.$$

ここで、$\{\frac{\lambda^a}{2},\frac{\lambda^b}{2}\} = \frac13\delta^{ab}\mathbb{1}+d^{abc}\frac{\lambda^c}{2}$ $(a,b,c\geq 1)$, $d^{0ab}=\sqrt{\frac23}\delta_{ab}$, $[\frac{\lambda^a}{2},\frac{\lambda^b}{2}]=if^{abc}\frac{\lambda^c}{2}$ $(a,b,c\geq 1)$, $f^{0bc}=0$ である。

従って、

$$\begin{cases} \delta(x_0)[Q^5_a(x_0),u_j(x,x_0)] = -id_{ajk}v_k(0)\delta^4(x) \\ \delta(x_0)[Q^5_a(x_0),v_j(x,x_0)] = id_{ajk}u_k(0)\delta^4(x) \\ \delta(x_0)[Q_a(x_0),u_j(x,x_0)] = if_{ajk}u_k(0)\delta^4(x) \\ \delta(x_0)[Q_a(x_0),v_j(x,x_0)] = if_{ajk}v_k(0)\delta^4(x) \end{cases} \quad (a=1\sim 8,\ j,k=0\sim 8)$$

を得る。

これらを用いて (1) を導出する:

$$\begin{cases} \bar{u}u = \dfrac{u_0 + 2u_3 + \sqrt{2}u_8}{4} \\ \bar{d}d = \dfrac{u_0 - 2u_3 + \sqrt{2}u_8}{4} \\ \bar{s}s = \dfrac{1}{2}u_0 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}\right)u_8 \end{cases} , \quad \begin{cases} m_u = \dfrac{\sqrt{6}}{3}c_0 + \dfrac{3}{2}c_3 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}c_8 \\ m_d = \dfrac{\sqrt{6}}{3}c_0 - \dfrac{3}{2}c_3 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}c_8 \\ m_s = \dfrac{\sqrt{6}}{3}c_0 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}c_8 . \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{(1)} &= m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d \\ &= 2\left(\frac{u_0 + \sqrt{2}u_8}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{6}c_0 + \sqrt{3}c_8}{3}\right) + 2\left(\frac{2u_3}{4}\right)\left(\frac{3c_3}{2}\right) \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt{6}c_0 + \sqrt{3}c_8}{6}}_{A} u_0 + \underbrace{\frac{3c_3}{2}}_{B} u_3 + \underbrace{\frac{\sqrt{6}c_8 + 2\sqrt{3}c_0}{6}}_{C} u_8 . \end{aligned}$$

故に $(*)''$ より

$$\begin{aligned} m_\pi f_\pi^2 &= \langle 0 | [Q_5^a, -id_{a0k} A V_k(0)\delta^4(x) - id_{a3k} B V_k(0)\delta^4(x) - id_{a8k} C V_k(0)\delta^4(x)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | A d_{a0k} d_{akl} u_l(0) + B d_{a3k} d_{akl} u_l(0) + C d_{a8k} d_{akl} u_l(0) | 0 \rangle \\ &= \cdots = \frac{m_u + m_d}{2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle . \end{aligned}$$

他も同様にやればよい.

まとめると,

$$\begin{cases} f_{\pi^\pm}^2 m_{\pi^\pm}^2 = -\dfrac{m_u + m_d}{2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle \\ f_{\pi^0}^2 m_{\pi^0}^2 = -m_u \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle - m_d \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle \\ f_{K^\pm}^2 m_{K^\pm}^2 = -\dfrac{m_u + m_s}{2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{s}s | 0 \rangle \\ f_{K^0}^2 m_{K^0}^2 = f_{\bar{K}^0}^2 m_{\bar{K}^0}^2 = -\dfrac{m_d + m_s}{2} \langle 0 | \bar{d}d + \bar{s}s | 0 \rangle . \\ f_{\eta^0}^2 m_{\eta^0}^2 = -\dfrac{m_u + m_d}{6} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle - \dfrac{4m_s}{3} \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle . \end{cases}$$

ここで崩壊定数の間に $f_{\pi^\pm} = f_{\pi^0} = f_{K^\pm} = f_{K^0} = f_{\bar{K}^0} = f_{\eta^0} = f_\pi$ が成り立つとし, また $SU(3)_V$ は自発的には破れないので,

$$\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle = -\Lambda^3 \neq 0 \quad (\Lambda \neq 0)$$

が成り立つとする.

このとき上の5つの式より

$$\begin{cases} m_{\pi^\pm}^2 = m_{\pi^0}^2 = (m_u + m_d)\dfrac{\Lambda^3}{f_\pi^2} \\ m_{K^\pm}^2 = (m_u + m_s)\dfrac{\Lambda^3}{f_\pi^2} , \quad m_{K^0}^2 = m_{\bar{K}^0}^2 = (m_d + m_s)\dfrac{\Lambda^3}{f_\pi^2} \\ m_{\eta^0}^2 = \dfrac{m_u + m_d + 4m_s}{3}\dfrac{\Lambda^3}{f_\pi^2} \end{cases}$$

が得られる.

さらにこの3つの式より

$$\frac{m_d}{m_s} = \frac{m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 - m_{\pi^0}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2 - 2m_{\pi^0}^2} \simeq 1.7 , \quad \frac{m_u + m_d}{m_s} \underset{(m_u = m_d)}{=} \frac{2m_{\pi^+}^2}{2m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2} \simeq 0.08$$

が得られる.

こうして s は u, d に比べ25倍程度重いことが理解される.